

# Ein Nutzenmaximierungsproblem mit unvollständiger Information und Expertenmeinungen in einem Finanzmarkt mit Markov-modulierter Drift

Von der Fakultät für MINT - Mathematik, Informatik, Physik,  
Elektro- und Informationstechnik  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus - Senftenberg

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doctor rerum naturalium  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Herrn Diplom-Mathematiker

Stephan Schütze

geboren am 04. Juli 1981 in Hoyerswerda

Gutachter: Herr Prof. Dr. rer. nat. habil. Ralf Wunderlich

Gutachter: Herr Prof. Dr. rer. nat. habil. Rüdiger Frey

Gutachter: Herr Prof. Dr. rer. nat. habil. Jörn Sass

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Mai 2016

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir optimale Portfoliostrategien für nutzenmaximierende Investoren in einem zeitstetigen Finanzmarktmodell mit Markov-modulierter Drift. Die als Drift bezeichnete mittlere Aktienrendite wird dabei durch eine zeitstetige Markovkette modelliert, welche nicht direkt beobachtbar und vom Investor aus den ihm zur Verfügung stehenden Information zu schätzen ist. Schätzungen, die aus Beobachtungen der Aktienpreise gewonnen werden, besitzen oft nur eine unbefriedigende Genauigkeit, da Drifteffekte in den Aktienpreisen in der Regel von einer hohen Volatilität überlagert werden. Aus diesem Grunde versucht man zusätzliche Informationsquellen wie z.B. Wirtschaftsnachrichten, Unternehmensberichte, Empfehlungen von Finanzanalysten, Bewertungen von Ratingagenturen und die eigene intuitive Einschätzung der künftigen Preisentwicklung in die Schätzungen einzubeziehen. Diese als Expertenmeinungen bezeichneten Informationen werden mit den Aktienpreisbeobachtungen kombiniert, um eine verbesserte Driftschätzung und damit eine bessere Performance der darauf aufbauenden optimalen Portfoliostrategien zu erzielen. Dieser Ansatz kann als eine zeitstetige Version des aus der Literatur bekannten statischen Black-Litterman-Modells betrachtet werden. Die mathematische Modellierung der Expertenmeinungen erfolgt mit Hilfe eines markierten Punktprozesses, dessen Sprunghöhenverteilung vom Zustand der nicht beobachtbaren Markovkette abhängt.

In der vorliegenden Arbeit wird insbesondere ein Nutzenmaximierungsproblem für den Power-Nutzen betrachtet. Dies führt auf ein stochastisches optimales Steuerungsproblem unter unvollständiger Information, für welches die zugehörige Dynamic Programming Equation (DPE) für die Wertfunktion hergeleitet wird. Aus deren Lösung kann die optimale Anlagestrategie abgeleitet werden. Die DPE ist eine partielle Integro-Differentialgleichung, für deren Lösung verschiedene Näherungsverfahren untersucht werden. Den Schwerpunkt bilden dabei explizite und semi-implizite Differenzenverfahren, bei welchen der Differentialoperator der DPE mit finiten Differenzen und der Integraloperator mit Quadraturformeln diskretisiert wird. Für das explizite Verfahren wird ein Konvergenzbeweis angegeben. Als weitere Näherungsverfahren kommen ein Policy-Improvement-Verfahren und die Monte-Carlo-Methode zum Einsatz. Die genannten Verfahren wurden implementiert und die Arbeit präsentiert Ergebnisse zu den durchgeführten numerischen Experimenten.

Im letzten Teil der Arbeit werden schließlich Diffusionsapproximationen für hochfrequente zeitdiskrete Expertenmeinungen betrachtet. Dazu wird insbesondere der Integraloperator der DPE für gegen unendlich strebende Intensität des Eintreffens der Expertenmeinungen untersucht. Die erhaltene Asymptotik erlaubt einerseits die Approximation der zeitdiskreten Experten durch einen als zeitstetigen Experten bezeichneten Diffusionsprozess und ist andererseits die Grundlage für ein weiteres Näherungsverfahren zur Lösung des Nutzenmaximierungsproblems.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Nutzenmaximierungsproblem</b>	<b>10</b>
2.1	Finanzmarktmodell . . . . .	10
2.2	Investorinformation . . . . .	13
2.3	Nutzenmaximierungsproblem . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Umformulierung des Nutzenmaximierungsproblems</b>	<b>17</b>
3.1	Transformation auf ein Steuerungsproblem unter vollständiger Information	17
3.2	Dynamic Programming Equation . . . . .	24
3.3	Regularisierung der Dynamic Programming Equation . . . . .	32
3.3.1	Reformulierung der Zustandgleichung . . . . .	33
3.3.2	Die regularisierte Dynamic Programming Equation . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Lösung des Nutzenmaximierungsproblems</b>	<b>37</b>
4.1	Modellfall für das unregularisierte Problem . . . . .	37
4.2	Finite Differenzen . . . . .	40
4.2.1	Vorbetrachtungen . . . . .	41
4.2.2	Semi-implizites Differenzenverfahren für die PIDE . . . . .	43
4.2.3	Diskretisierung des Integraloperators . . . . .	45
4.2.4	Konvergenzbeweis für das explizite Verfahren . . . . .	50
4.3	Policy-Improvement . . . . .	57
4.3.1	Theoretische Fundierung . . . . .	58
4.3.2	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	59
4.3.3	Finite Differenzen . . . . .	63
4.4	Numerik des regularisierten Problems . . . . .	64
4.4.1	Modellfall . . . . .	64
4.4.2	Explizites Differenzenverfahren . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>69</b>
5.1	Wertfunktionen und optimale Strategien . . . . .	69
5.2	Gegenüberstellung verschiedener numerischer Verfahren . . . . .	73
5.2.1	Differenzenverfahren für das unregularisierte Problem . . . . .	74
5.2.2	Policy-Improvement . . . . .	81
5.2.3	Differenzenverfahren für das regularisierte Problem . . . . .	84
5.3	Monetärer Wert der Expertenmeinungen . . . . .	91

<b>6</b>	<b>Diffusionsapproximation</b>	<b>95</b>
6.1	Grenzübergang für den Integraloperator . . . . .	97
6.2	Diffusionsapproximation für zeitdiskrete Expertenmeinungen im Modellfall	106
6.3	Nutzenmaximierungsproblem mit stetigem Experten . . . . .	108
	<b>Anhang</b>	<b>112</b>
<b>A</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>112</b>
A.1	Girsanov-Theorem und Novikov Bedingung . . . . .	112
A.2	Zeitstetige Markov Ketten . . . . .	113
A.3	Sprungmaß eines Sprungprozesses . . . . .	114
A.4	Itô-Integral für Semimartingale . . . . .	117
<b>B</b>	<b>Beweise aus Kapitel 6</b>	<b>118</b>
B.1	Beweis von Satz 6.1 . . . . .	118
B.2	Beweis von Satz 6.3 . . . . .	126
B.3	Beweis von Hilfssatz 6.4 . . . . .	127
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>130</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>134</b>



---

# 1 Einleitung

Unter den Finanzmärkten versteht man gemeinhin die Menge der Orte dieser Welt, an denen man Handel mit Kapital treiben kann. Eine Möglichkeit dies zu tun, ist der Handel mit Wertpapieren. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Preisentwicklung eines Wertpapiers, welche sich durch Angebot und Nachfrage nach eben diesen Wertpapieren ergibt, ein volatiles Verhalten zeigt. Darunter versteht man ein lokales Schwanken des Wertpapierpreises um einen langfristigen Trend. In der Praxis steht ein Investor schließlich vor dem Problem, sein positives Anfangskapital  $x_0$  innerhalb eines Investitionszeitraumes durch Umschichten seines Portfolios zu optimieren. Die Portfoliooptimierung als Teilgebiet der Finanzmathematik ist die wissenschaftliche Reaktion zu dieser Problemstellung. In der Sprache der Mathematik formuliert, bestehen Portfoliooptimierungsprobleme in der Bestimmung von Handels- und Konsumtionsstrategien durch Optimierung eines Gütekriteriums. Den Beginn der Portfoliooptimierung markiert die Mean-Variance Analysis von Markowitz [38], in welchem Handel nur zu Beginn der Handelsperiode dieses Einperiodenmodells erlaubt ist. Der (numerischen) Komplexität der später entwickelten Mehrperiodenmodelle entsprang der Wunsch, ein zeitstetiges Modell als Grundlage für die Wahl der optimalen Konsumtions- und Handelsstrategie zu gewinnen. Nachdem zunächst Louis Bachelier in seiner Arbeit [2] vorgeschlagen hatte, den Preisprozess  $S_t = S_0 + \sigma W_t$  eines solchen Wertpapiers unter Verwendung eines Standard-Wiener-Prozesses  $W_t$  zu modellieren, lieferte schließlich das von Black und Scholes verwendete Modell ein befriedigenderes Modell mit einer geometrischen Brownschen Bewegung zur Modellierung der Wertpapierpreise. Dieses sieht einen als bekannt vorausgesetzten langfristigen Trend  $\mu$  vor, um welchen die Wertpapierpreise mit einer als bekannt vorausgesetzten Volatilität  $\sigma$  schwanken. Merton hat schließlich in seiner bahnbrechenden Arbeit [40] auf der Grundlage dieses Modells das Nutzenmaximierungsproblem für einen endlichen Zeithorizont als auch das Konsumtionsproblem für einen unendlichen Zeithorizont gelöst. Seither gab es eine ganze Reihe von Weiterentwicklungen der angesprochenen Portfoliooptimierungsprobleme, welche sich einerseits hinsichtlich der Aufgabenstellung, als auch hinsichtlich der verwendeten Methoden klassifizieren lassen. Zur Lösung der Portfoliooptimierungsprobleme konkurrieren die Martingalmethode, die stochastische Dualitätstheorie, das Malliavin Kalkül als auch die Dynamic Programming Methode. Die in den 1980er Jahren entwickelte Martingalmethode, welche in Arbeiten von Cox und Huang [12], Karatzas, Lehoczky, Shreve [26] sowie Pliska [47] ausgearbeitet wurde, sowie die Dualitätstheorie von Bismut [7] und Xu [60], als auch das Malliavin Kalkül, siehe die Arbeiten von Ocone & Karatzas [42], Kuwana [33],[34], Lakner [35] und Karatzas [25] soll uns in dieser Arbeit nicht beschäftigen. In seinen Arbeiten [39] und [40] hat Merton den Vermögensprozess als von der Handels- und Konsumtionsstrategie gesteuerten stochastischen Prozess aufgefasst und unter Verwendung des Itô-Kalküls und Methoden der dynamischen Programmierung das Nutzenmaximierungsproblem gelöst. Auf der Grundlage solider Kenntnisse der stochastischen Analysis und der stochastischen Integration, wie man sie beispielsweise in den Lehrbüchern von Protter [48] und Øksendal [43] findet, bieten die Bücher von Pham [46] und Touzi [59] lesenswerte Einführungen in

---

die Theorie der zeitstetigen stochastischen optimalen Steuerung. Für einen Leser, welcher eher an einer Einführung mit direktem Bezug zur Finanzmathematik interessiert ist, bieten sich die Bücher von Björk [8], Cont und Tankov [11], Davis und Lleo [15] sowie Rogers [49] an.

Die von Merton gelösten Probleme zählen inzwischen zu den klassischen Problemen der Finanzmathematik, und sind nachwievor Ausgangspunkt für verschiedenste Verallgemeinerungen, deren Mannigfachigkeit hier nicht erschöpfend ausgeführt werden soll. Diese reichen von nicht stetigen Preis- und Bondprozessen, z.B. Sprung-Diffusionen bei Øksendal & Sulem [44], oder auch in der Dissertation von Jonek [24], welche direkt zu unvollständigen Märkten führen, siehe auch [53], bis hin zu Modellen mit zusätzlichen Ansätzen wie Transaktionskosten (Shreve & Soner [57], Korn [29],[30], Tin-Kwai [58]) und Worst-Case-Portfolio-Optimierung, siehe Seifried [55], Korn & Seifried [31], Korn & Steffensen [32]). Insbesondere das Buch von Rogers [49] diskutiert auf der Basis der Mertonprobleme eine Vielzahl von Modellvarianten.

Darüberhinaus handelt es sich bei den Merton-Problemen wegen ihrer als bekannt vorausgesetzten Drift und Volatilitätsparameter um Modelle unter vollständiger Information. Während man den Volatilitätsparameter  $\sigma$  in der Praxis sehr gut durch Berechnung der quadratischen Kovariation schätzen kann, ist es praktisch unmöglich in der Zeitspanne eines Arbeits- oder Menschenlebens die Drift  $\mu$  zuverlässig zu schätzen. Dies war der Ausgangspunkt das Black-Scholes Modell dahingehend zu verallgemeinern, die Drift und/oder Volatilität selbst als stochastische Prozesse zu modellieren. Sind diese Prozesse unbeobachtbar, dann spricht man von Modellen mit unvollständiger bzw. partieller Information, welche man wieder mit und ohne Nebenbedingungen betrachten kann. Eine Klasse dieser Modelle sind jene, in welchem die Volatilität konstant ist, während man die Drift  $\mu$  zufällig wählt. Für jene ohne Nebenbedingungen haben beispielsweise Karatzas und Xu in ihrer Arbeit [27] die Drift als zeitunabhängige Zufallsgröße modelliert (Bayes-Modell). Dagegen wird bei Lakner [36], Brendle [10], Kim & Omberg [28] und dem Buch von Davis & Lleo [15] die Drift als Gauss Prozess (Linear Gaussian Model, auch als Kim-Omberg Modell bezeichnet), speziell ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, modelliert, welches den Kalman-Filter benötigt. Neben dem Bayes- und LGM-Modell hat sich in Arbeiten von Sass & Haussmann [50] und Bäuerle & Rieder [3], [4] noch das Hidden Markov Modell (HMM Modell) etabliert. In diesem modelliert man die Drift als zeitstetige Markovkette und benötigt den HMM-Filter. Für ein Modell unter unvollständiger Information und Nebenbedingungen erwähnen wir die Arbeiten von Gabih, Sass und Wunderlich [21], [51] und [20]. Eine weitere Stufe der Evolution dieser Modelle bestand nun in dem Wunsch, den Modellen unter partieller Information, in welchen der Investor lediglich aus den beobachtbaren Renditen schließen kann, eine weitere Informationsquelle, Expertenmeinungen, zuzulassen. Während die Arbeit von Black und Littermann [9] die Expertenmeinungen in das diskrete Modell von Markowitz getragen hat, haben Frey, Gabih und Wunderlich die Expertenmeinungen in die stetigen Modelle mit partieller Information eingeführt. Im Falle des LGM-Modells verweisen wir auf [19] als auch Davis & Lleo [14] und im HMM Modell auf Gabih, Frey und Wunderlich [18].

---

Die vorliegende Arbeit ist aus den zuletzt genannten Arbeiten von Frey, Gabih und Wunderlich hervorgegangen. Im ersten und zweiten Kapitel wird das Nutzenmaximierungsproblem im Fall partieller Information formuliert. Es werden eine risikolose Anleihe mit Nullverzinsung betrachtet, sowie  $n$  Preisprozesse mit konstanter Volatilität, und einem HMM Modell für die nicht direkt beobachtbare Drift. Darüberhinaus hat der Investor die Möglichkeit neben den Renditen auch auf Expertenmeinungen zurückzugreifen. Die Experten lässt man an zufälligen diskreten Zeitpunkten  $T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  Aussagen, über den, ihrer Meinung nach, tatsächlichen Zustand der Drift treffen.

Im dritten Kapitel dieser Monographie transformieren wir zunächst das Nutzenmaximierungsproblem unter partieller Information in ein Nutzenmaximierungsproblem unter vollständiger Information. Hierbei verwenden wir den HMM Filter, welcher vermöge des Innovationsprozesses die beobachtbaren Renditen zur Schätzung der Drift heranzieht. Die Expertenmeinungen gehen über ein Bayes'sches Updating an den diskreten Zeitpunkten  $T_k$  in die Filtergleichung ein. Hierbei erscheint dann der Filterprozess als Sprung-Diffusion. Anschließend wird unter Verwendung des Girsanov Theorems und Ideen aus [41] einmal das regularisierte als auch das unregularisierte Problem formuliert. Die Herleitung der diesen Problemen zugeordneten PIDE runden das Kapitel ab.

Das vierte Kapitel ist der numerische Teil dieser Abhandlung. Zu einem im ersten Paragraphen des Kapitels formulierten Modellfall, mit einer Aktie und zwei möglichen Zuständen der Drift, formulieren wir im zweiten Paragraphen ein  $\Theta$ -gewichtetes semi-implizites Differenzenverfahren, und geben im expliziten Fall,  $\Theta = 0$ , einen Konvergenzbeweis an. Der dritte Paragraph dieses Kapitels stellt mit dem Policy Improvement eine weitere Möglichkeit der näherungsweisen Berechnung der Wertfunktion  $V$  dar. Hierbei verwenden wir einmal eine Monte-Carlo-Methode zur iterativen Berechnung der Wertfunktion, und einmal Finite Differenzen, indem wir zu jeder Iterierten eine eigene PIDE lösen. Der vierte Paragraph enthält ein explizites Differenzenverfahren für den Modellfall des regularisierten Problems.

Kapitel 5 ist eine Zusammenstellung der numerischen Ergebnisse der im vorigen Kapitel verwendeten Verfahren. Anhand eines Modellparametersatzes werden zunächst Eigenschaften optimaler Strategien demonstriert. Anschließend erfolgt eine Demonstration einmal der Konvergenzeigenschaften des in Kapitel 4.2.2 formulierten Differenzenverfahrens, sowie ein Vergleich zwischen Monte-Carlo-Methode und Differenzenverfahren im Falle des Policy Improvement. Numerische Ergebnisse zum regularisierten Problem runden den Paragraphen ab. Wir schließen mit einer numerischen Studie, welche eine Interpretation für den monetären Wert der Expertenmeinungen liefert.

Im letzten Kapitel zeichnen wir einen Weg ausgehend von unseren an diskreten Zeitpunkten auftretenden Experten hin zum in stetiger Zeit auftretenden Experten. Durch einen immer häufiger auftretenden und gleichzeitig immer unzuverlässigeren diskreten Experten betrachten wir eine Familie von Zustandsprozessen, deren Generatoren in der Grenze den Generator eines Diffusionsprozesses ergeben. Die Besonderheit dieser Diffusionsapproximation gründet sich in dem Umstand, dass es sich bei den Zustandsprozessen um Sprung-Diffusionsprozesse handelt, deren Sprungverteilungen vom Zustandsprozess abhängen. Dagegen wird in der Literatur zu Diffusionsapproximationen (üblicherwei-



---

se) angenommen, dass die Sprünge eine Folge von identisch und unabhängig verteilten Zufallsgrößen bilden.

Nun ist es an der Zeit denjenigen zu danken, welche einen ganz wesentlichen und substantiellen Anteil am Gelingen dieser Arbeit hatten. Dies betrifft in erster und auch einziger Weise meinen Betreuer Prof. Dr. Ralf Wunderlich, der mir vor vier Jahren die Möglichkeit gegeben hat, an seinem Lehrstuhl zu arbeiten. Ohne sein unschätzbares Engagement, seine Mühe und die ungezählten und endlosen Gespräche, zu denen er sich jederzeit bereit gefunden hat, hätte diese Arbeit nicht entstehen können. Gedankt sei auch allen anderen Kollegen der beiden mathematischen Institute unserer Universität, welche maßgeblich für das kollegiale und angenehme Arbeitsklima verantwortlich sind.

## 2 Nutzenmaximierungsproblem

### 2.1 Finanzmarktmodell

Ausgangspunkt dieser Abhandlung ist das wohlbekannte Merton Problem. Bei diesem steht ein Investor vor der Frage, wie er sein Portfolio, bestehend aus einem Bond und verschiedenen Aktien, innerhalb eines Investitionszeitraums  $[0, T]$  in stetiger Zeit so umschichten muss, dass sein Nutzen aus dem gewonnenen Endvermögen in einem gewissen, noch zu präzisierenden Sinne optimal wird. Das Merton Problem setzt einen klassischen Finanzmarkt nach Black und Scholes voraus, in welchem für die durch das System stochastischer Differentialgleichungen (SDE)

$$\begin{aligned} dS_t^i &= S_t^i \left( \mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j \right), i = 1, \dots, n, \\ S_0^i &= s_0^i, \end{aligned}$$

gegebenen Preisprozesse, die Annahme  $(\mu_1, \dots, \mu_n)^T = \text{const}$  und die reguläre Matrix  $\sigma = \{\sigma_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,n} = \text{const}$  zugrundeliegt, wohingegen die Preisentwicklung des Bonds durch

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt, \quad S_0^0 > 0$$

mit konstanter Verzinsung  $r \geq 0$  gekennzeichnet ist. Dabei ist  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)^T$  ein Wiener Prozess und  $\mathbb{G} := \mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$  bezeichne die von ihm erzeugte Filtration. Bezeichne  $X_t$  das Vermögen des Investors zum Zeitpunkt  $t$  und  $\psi_t = (\psi_t^0, \dots, \psi_t^n)$  den Vektor, dessen  $i$ -te Komponente für  $i = 1, \dots, n$  die Anzahl der Wertpapiere zum Preisprozess  $S_t^i$ , bzw im Fall  $i = 0$  des Bonds, angibt. Der Vermögensprozess folgt der Dynamik

$$dX_t = \sum_{i=0}^n \psi_t^i dS_t^i. \tag{2.1}$$

Unter der Voraussetzung  $X_t > 0$  f.s. und Übergang zu den relativen Anteilen des in die Position  $i$  investierten Vermögens  $X_t$  zum Zeitpunkt  $t$

$$h_t^i := \frac{\psi_t^i S_t^i}{X_t}, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.2)$$

läßt sich das Portfolio wegen

$$h_t^0 := 1 - \sum_{i=1}^n h_t^i$$

durch die Angabe seines Strategieprozesses  $h_t = (h_t^1, \dots, h_t^n)$  beschreiben. Dabei betrachten wir nur selbstfinanzierende Handelsstrategien gemäß Definition 6.2 aus [8]. Der stochastische Prozess  $(h_t)_{t \in [0, T]}$  erweist sich als Steuerung des Vermögensprozesses, was man mit der Schreibweise  $X_t^{(h)}$  zum Ausdruck bringt.

**Definition 2.1.** *Die Funktion*

$$U(x) : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

*sei auf  $(0, \infty)$  streng monoton wachsend, streng konkav, zweimal stetig differenzierbar und es gelte*

$$\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0.$$

*Dann nennen wir  $U$  eine Nutzenfunktion.*

**Bemerkung 2.2.** Wir interessieren uns in erster Linie für die Potenznutzenfunktionen

$$U(x) := \frac{x^\theta}{\theta}, \quad \theta \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}.$$

Aus Gründen der Vollständigkeit verweisen wir auch auf die logarithmische Nutzenfunktion  $U(x) := \ln x$ , welche als Grenzfall der Potenznutzenfunktionen gemäß

$$\frac{x^\theta - 1}{\theta} \longrightarrow \ln x, \quad (\theta \longrightarrow 0)$$

entsteht. In diesem Fall wird, wie wir später sehen werden, das zugrundeliegende (und noch einzuführende) Nutzenmaximierungsproblem besonders einfach zu lösen sein.

Das Merton Problem besteht nun präziser gefaßt darin, eine Steuerung  $h^*$  aus der Menge zulässiger Strategien

$$\mathcal{H} := \left\{ h = (h_t)_{t \in [0, T]} : E \left( \int_0^T h_t^2 dt \right) < \infty, \right. \\ \left. h \text{ selbstfinanzierend u. } \mathbb{F}^W \text{ adaptiert, } X_t^{(h)} > 0 \text{ f.s. } \forall t \in [0, T] \right\}$$

auszuwählen, so dass  $h^*$  folgenden Ausdruck maximiert:

$$E \left( U(X_T^{(h)}) \right),$$

wobei  $U$  Nutzenfunktion im Sinne von Definition 2.1 ist. Merton gab 1971 in [40] mit Methoden der dynamischen Programmierung eine Lösung dieses Problems an. Seither gab es eine ganze Reihe von Autoren, die dieses Problem verallgemeinert haben.

Gegenstand dieser Arbeit ist nun eine Verallgemeinerung dieses Modells wie es in den Arbeiten von Frey, Gabih und Wunderlich [17] und [18] geschehen ist. Dabei betrachten wir gleichermaßen den Investitionshorizont  $[0, T]$  und legen allen auftretenden Prozessen den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, P), \text{ mit der Filtration } \mathbb{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{t \in [0, T]}$$

zugrunde. Im Gegensatz zum klassischen Finanzmarktmodell nach Black und Scholes betrachten wir  $n$  verschiedene risikobehaftete Wertpapiere mit Preisprozessen

$$\begin{aligned} dS_t^i &= S_t^i \left( \mu_i(Y_t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}dW_j \right), i = 1, \dots, n, \\ S_0^i &= s_0^i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

deren nicht direkt beobachtbare Drift von einer zeitstetigen Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum abhängt. Wie im Black-Scholes-Modell hat der Investor auch die Möglichkeit zur Investition in eine risikolose Anleihe, einem Bond mit Preisentwicklung

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt, \quad S_0^0 > 0.$$

Im Folgendem setzen wir der Einfachheit halber  $r = 0$ . In Vektorschreibweise erhalten wir für die Preisprozesse der risikobehafteten Anlagen

$$dS_t = \text{diag}(S_t)(\mu(Y_t)dt + \sigma dW_t)$$

mit  $\mu(Y_t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und fordern  $\det \sigma \neq 0$ . Dabei ist  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)^\top$  ein an die Filtration  $\mathbb{G}$  adaptierter (Standard) Wiener-Prozess und

$$Y = (Y_t)_{t \in [0, T]} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \{e_1, \dots, e_d\} \quad (2.4)$$

eine vom Wiener Prozess unabhängige zeitstetige Markov-Kette. Der Vektor  $e_j$  bezeichnet den  $j$ -ten Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^d$ . Dabei läßt sich  $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$  wahrscheinlichkeitstheoretisch eindeutig durch seine Intensitätsmatrix

$$Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

und seine Anfangsverteilung

$$\check{p}_0 = (P(\{Y_0 = e_1\}), \dots, P(\{Y_0 = e_d\}))^\top \quad (2.5)$$

beschreiben. Für eine kurze Einführung in die Theorie der zeitstetigen Markov-Ketten verweisen wir auf den Paragraphen A.2. Wir nehmen an, das die Drift  $d$  verschiedene Zustände  $(\mu_1, \dots, \mu_d)$  mit  $\mu_j := (m_{1j}, \dots, m_{nj})^\top \in \mathbb{R}^n$  mit  $j = 1, \dots, d$  annehmen kann. Für  $\mu(Y_t)$  ergibt sich dann die Darstellung

$$\mu(Y_t) = MY_t, \quad M = (m_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, d}} \in \mathbb{R}^{n \times d}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Investorinformation

Die dem Investor zugrunde liegenden Informationen, auf deren Basis er seine Investitionsentscheidungen trifft, speisen sich in diesem Modell aus zwei Quellen.

- 1) Die erste Quelle sind die beobachteten Renditen

$$dR_t^i = \frac{dS_t^i}{S_t^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Für die von  $S$ ,  $R$  und  $\log S$  erzeugten Filtrationen gilt:

$$\mathcal{G}^R = \mathcal{G}^{\log S} = \mathcal{G}^S, \quad (2.8)$$

wie folgende Überlegung zeigt. Eine einfache Anwendung der Itô-Formel liefert

$$S_t^i = S_0^i \exp \left\{ \int_0^t \left( \mu_i(Y_s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{jj}^2 \right) ds + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} W_t^j \right\}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

so das wir mit der quadratischen Variation wegen  $[R^i]_t = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}^2 t$  unmittelbar

$$\log S_t^i = R_t^i - \frac{1}{2} [R^i]_t + \log S_0^i$$

und folglich auch  $[R^i]_t = [\log S^i]_t$  erhalten. Damit ergibt sich die erste Identität aus (2.8). Die zweite Identität folgt aus der Beobachtung

$$\{S_t^i < e^x\} \iff \{\log S_t^i < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 2) Neben den Renditen, kann ein Investor in der Praxis auch auf andere Informationsquellen zurückgreifen. Dies können beispielsweise eigene subjektive Einschätzungen, Unternehmensberichte oder Bewertungen von Rating Agenturen sein. Insgesamt benennen wir die Menge dieser Informationsquellen als Experten. Im Fall zeitdiskreter Aktienpreismodelle findet man die Modellierung solcher Experten im Modell von Black-Littermann [9]. In unserem Fall verstehen wir unter einem Experten, eine Informationsquelle, welche an zufälligen Zeitpunkten  $T_k \in [0, T]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  eine Aussage

$Z_k \in \mathbb{R}^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  über den Zustand der Drift  $\mu(Y_{T_k})$  macht. Die Informationszeitpunkte  $T_k$  seien die Sprungzeitpunkte eines Poisson-Prozesses mit Intensität  $\lambda$ , und damit gilt  $T_k \sim \text{Gam}(k, \lambda)$ . Aus diesem Grund wird es im Investitionszeitraum  $[0, T]$  höchstens endliche viele Sprungzeitpunkte geben. Mathematisch modellieren wir den Experten als markierten Poissonschen Punktprozess

$$I = \{(T_k, Z_k)\}_{k \geq 1} \text{ mit } \mathcal{G}_t^I := \sigma((T_k, Z_k) : T_k \leq t).$$

Dabei seien für

$$\mathcal{Z} := \{z \in \mathbb{R}^\nu : -\infty < l_k \leq z_k \leq u_k < \infty, k = 1, \dots, \nu\} \quad (2.9)$$

die  $Z_k \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^\nu$ , Realisierungen einer Zufallsgröße, deren Verteilung gegeben  $Y_{T_k} = e_k$  absolut stetig ist und die Dichtefunktion  $f_k(z)$  besitzt. Hierbei ist die Verteilung der  $Z_k$  vom aktuellen Zustand der Markov-Kette  $Y_{T_k}$  abhängig, so dass  $\{Z_k\}_{k=1,2,\dots}$  bedingt unabhängig geben  $\mathcal{G}_T^Y$  ist. Weiterhin sei bemerkt, dass aus den Ankunftszeiten  $T_k$  der Expertenmeinungen keine verwertbaren Informationen über  $Y$  gewonnen werden können.

Zusammenfassend beschreibt

$$\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \quad \mathcal{F}_t := \mathcal{G}_t^R \vee \mathcal{G}_t^I = \sigma(S_u : u \leq t, (T_k, Z_k) : T_k \leq t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.10)$$

die Investorfiltration, d.h. die Information, die dem Investor zur Zeit  $t$  zur Verfügung steht. Dem markierten Punktprozess  $I$  ordnen wir in natürlicher Weise das assoziierte zufällige Zählmaß

$$I([0, t] \times A) := \sum_{k: T_k \leq t} \delta_{\{Z_k \in A\}}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$$

zu, welches die Anzahl der zufälligen Sprünge  $Z_k \in A$  innerhalb des Zeitraums  $[0, t]$  angibt. Dabei verwenden wir  $I(dt \times dz)$  für die infinitesimale Schreibweise von  $I$ . Mit  $I^K(dt \times dz) := E(I(dt \times dz) | \mathcal{F}_t)$  bezeichnen wir im Folgenden den  $\mathbb{F}$ -Kompensator des zufälligen Zählmaßes  $I$ . Weiterhin bezeichnen wir mit

$$\tilde{I}(dt \times dz) := I(dt \times dz) - I^K(dt \times dz)$$

das kompensierte Sprungmaß, des dem markierten Punktprozess  $I$  assoziierten Sprungmaßes  $I$ . Für eine motivierende Einführung zu Sprungprozessen verweisen wir auf A.3 des Anhangs dieser Monographie.

## 2.3 Nutzenmaximierungsproblem

Mit den Gleichungen (2.1) und (2.2) zu Beginn des Kapitels, haben wir gesehen, dass man das Portfolio durch die Angabe seines Strategieprozesses  $h_t = (h_t^1, \dots, h_t^n)$  beschreiben

kann. Genauer betrachten wir nur selbstfinanzierende Handelsstrategien  $h$ , für welche die Dynamik des Vermögensprozesses  $X_t^{(h)}$  für  $r = 0$  durch

$$dX_t^{(h)} = X_t^{(h)} \sum_{i=1}^n h_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i}$$

beschrieben wird, siehe Definition 6.2 und Lemma 6.4 aus [8]. Unter Berücksichtigung des Aktienpreismodells (2.3) genügt der Vermögensprozess  $X^{(h)}$  der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dX_t^{(h)}}{X_t^{(h)}} &= \sum_{i=1}^n h_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} = h_t^\top \mu(Y_t) dt + h_t^\top \sigma dW_t, \\ X_0^{(h)} &= x_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Definition 2.3.** Sei  $c_1 < 0$ ,  $c_2 > 0$  und

$$\mathcal{K} := \{h \in \mathbb{R}^n : h_i \geq c_1, \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \sum_{i=1}^n h_i \leq c_2\}$$

mit dem Inneren  $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$  von  $\mathcal{K}$ , so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{H} := \left\{ h = (h_t)_{t \in [0, T]} : h \text{ ist } \mathbb{F} - \text{adaptiert, } h_t \in \mathcal{K} \forall t \in [0, T] \right\} \quad (2.12)$$

die Menge der zulässigen Strategien.

**Bemerkung 2.4.**

- 1) Während die Konstante  $c_1$  in obiger Definition die Größe der Leerverkäufe einschränkt, kann man  $c_2$  als Restriktion an die Kreditaufnahme interpretieren, da der Bondanteil gemäß  $1 - \sum_{i=1}^n h_t^i \geq 1 - c_2$  nicht beliebig klein werden kann.
- 2.) Obige Definition der Menge zulässiger Strategien unterscheidet sich von jener in Definition 2.3 dadurch, dass wir zum einen im Gegensatz zu  $\mathbb{F}^W$  die Investorfiltration  $\mathbb{F}$  verwenden und zum anderen die Integralbedingung in Definition 2.3 durch die Forderung  $h \in \mathcal{K}$  verschärfen, woraus sich unmittelbar die Gültigkeit der später benötigten Novikov-Bedingung (siehe Satz A.3) ergibt:

$$E \left( \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|h_s\|_2^2 ds \right\} \right) < \infty. \quad (2.13)$$

- 3.) Wegen  $\mu(Y_t) \in \{\mu_1, \dots, \mu_d\} \subset \mathbb{R}^n$  bleibt  $\mu$  beschränkt. Da weiterhin die Volatilität  $\sigma$  konstant ist, erfüllen die Koeffizientenfunktionen von (2.11) für  $h \in \mathcal{H}$  die hinreichenden Lipschitz- und Wachstumsbedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung (2.11).

Mit diesen einführenden Vorbereitungen können wir nun das Portfoliooptimierungsproblem formulieren. Wir gehen davon aus, dass der Investor daran interessiert ist den mittleren Nutzen seines Endvermögens zu maximieren. Wir suchen also eine selbstfinanzierende Handelsstrategie  $h^* \in \mathcal{H}$  mit

$$E(U(X_T^{(h^*)})) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \{E(U(X_T^{(h)}))\}. \quad (2.14)$$

**Bemerkung 2.5.** In unserem Modell ist  $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ . Da es sich bei  $h$  um einen  $\mathbb{F}$ -adaptierten stochastischen Prozess handelt, wohingegen  $X$  nicht an die Filtration  $\mathbb{F}$  adaptiert ist, nennen wir das obige Steuerungsproblem ein Steuerungsproblem unter partieller Information. Dies stellt im Vergleich zu klassischen stochastischen Steuerungsproblemen eine Besonderheit dar, da im klassischen Fall die Steuerung und der Zustandsprozess an die gleiche Filtration adaptiert sind.

### 3 Umformulierung des Nutzenmaximierungsproblems

#### 3.1 Transformation auf ein Steuerungsproblem unter vollständiger Information

Ausgehend vom Steuerungsproblem (2.14) unter partieller Information werden wir vermöge einer Kombination des HMM-Filters und Bayesschen Updating das Steuerungsproblem unter partieller Information in ein Steuerungsproblem unter vollständiger Information überführen. Hierfür ist es notwendig, die unbekannte Drift  $\mu(Y_t)$  aus der Vermögensgleichung (2.11) zu schätzen. Dies erreichen wir mithilfe der oben erwähnten Kombination des HMM-Filters aus Satz 9.1 des Buches von Lipster und Shiryaev [37], welcher mit einer weiter unten beschriebenen Updating-Prozedur versehen wird. Hierbei bezeichne  $E(\mu(Y_t)|\mathcal{F}_t)$  die Projektion der  $\mathbb{G}$ -adaptierten Drift  $\mu$  auf die Investorfiltration  $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ . Weiterhin bezeichnen wir mit  $p_t := (p_t^1, \dots, p_t^d)^\top \in \mathbb{R}^n$  den Filter für die Markov-Kette  $Y_t$ , wobei  $p_t^k := P(Y_t = e_k | \mathcal{F}_t)$ . Wegen  $\mu_t = \mu(Y_t)$  berechnet sich die Schätzung für die auf die Investorfiltration  $\mathbb{F}$  projizierte Drift  $\mu$  mit  $M$  aus (2.6) gemäß

$$E(\mu(Y_t)|\mathcal{F}_t) = \mu(p_t) = Mp_t = \sum_{k=1}^d p_t^k \mu_k. \quad (3.1)$$

Im Folgenden werden wir ein stochastisches Differentialgleichungssystem für die auftretende Größe  $p$  aufstellen. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

1. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Informationszeitpunkten  $T_k$  und  $T_{k+1}$  ist  $p_t$  auf  $(T_k, T_{k+1})$  Lösung des vom Innovationsprozess

$$B_t := \sigma^{-1} \left( R_t - \int_0^t Mp_s ds \right)$$

mit  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)^\top$  getriebenen stochastischen Anfangswertproblems

$$dp_t = \tilde{\alpha}(p_t)dt + \tilde{\beta}^\top(p_t)dB_t, \quad (3.2)$$

mit Anfangswert  $p_{T_k}$  und  $\tilde{\alpha}(p) = (\tilde{\alpha}_1(p), \dots, \tilde{\alpha}_d(p))^\top = Q^\top p \in \mathbb{R}^d$ , so dass für  $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$  gilt

$$\tilde{\alpha}_j(p) = \sum_{i=1}^d q_{ij} p^i, \quad j = 1, \dots, d \quad (3.3)$$

und  $\tilde{\beta}(p) := (\tilde{\beta}_1(p), \dots, \tilde{\beta}_d(p)) \in \mathbb{R}^{n \times d}$  wobei

$$\tilde{\beta}_j(p) = p^j \sigma^{-1}(\mu_j - \sum_{i=1}^d p^i \mu_i) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.4)$$



- 2) Da wir neben den Returns auch die zu den zufälligen Zeitpunkten  $T_k$  eingehende Expertenmeinung  $Z_k$  für die Schätzung  $\mu(p_t)$  der aktuellen unbeobachtbaren Drift  $\mu_t$  berücksichtigen möchten, versehen wir die Filtergleichung (3.2) in jeder Komponente an den Sprungzeitpunkten  $T_k$  mit dem additiven Term

$$\Delta p_{T_k}^j := p_{T_k}^j - p_{T_k-}^j.$$

Hierbei bezeichnet  $p_{T_k-}^j$  den Wert des Filters unmittelbar vor dem Sprungzeitpunkt und  $p_{T_k}^j$  den Wert unmittelbar nach dem Sprung. Dabei ergeben sich wie im Paper [17] beschrieben, die a posteriori Wahrscheinlichkeiten  $p_{T_k}^j$ ,  $j = 1, \dots, d$  aus einem Bayes'schen Updating

$$p_{T_k}^j = \frac{p_{T_k-}^j f_j(Z_k)}{\check{f}(Z_k, p_{T_k-})} \text{ mit } \check{f}(z, p) := \sum_{j=1}^d p^j f_j(z).$$

Damit erhalten wir für das Inkrement  $\Delta p_{T_k}^j := p_{T_k}^j - p_{T_k-}^j$

$$\Delta p_{T_k}^j = p_{T_k-}^j \left( \frac{f_j(Z_k)}{\check{f}(Z_k, p_{T_k-})} - 1 \right) = p_{T_k-}^j \int_{\mathcal{Z}} \left( \frac{f_j(z)}{\check{f}(z, p_{T_k-})} - 1 \right) I(\{T_k\} \times dz). \quad (3.5)$$

Insgesamt fassen wir obige Überlegungen in folgendem Hilfssatz zusammen:

**Hilfssatz 3.1.** *Der Filter  $p$  ist Lösung des stochastischen Differentialgleichungssystems mit  $j = 1, \dots, d$  Gleichungen der Gestalt*

$$\begin{aligned} dp_t &= \tilde{\alpha}(p_t) dt + \tilde{\beta}^\top(p_t) dB_t + \int_{\mathcal{Z}} \tilde{\gamma}(p_{t-}, z) \tilde{I}(dt \times dz) \\ p_0 &= \check{p}_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit  $\check{p}_0$  aus (2.5) und den Koeffizientenfunktionen  $\tilde{\alpha}_j(p)$  gemäß (3.3) und  $\tilde{\beta}_j(p)$  gemäß (3.4) sowie dem Sprungkoeffizienten

$$\tilde{\gamma}(p, z) = (\tilde{\gamma}_1(p, z), \dots, \tilde{\gamma}_d(p, z)) \quad (3.7)$$

mit

$$\tilde{\gamma}_j(p, z) = p^j \left( \frac{f_j(z)}{\check{f}(z, p)} - 1 \right)$$

für  $j = 1, \dots, d$ . Dabei bezeichnet

$$\tilde{I}(dt \times dz) := I(dt \times dz) - \lambda \sum_{j=1}^d p_t^j f_j(z) dt dz$$

das dem markierten Punktprozess  $(T_k, Z_k)$  assoziierte  $\mathbb{F}$ -kompensierte Sprungmaß.

*Beweis:* Die Gestalt der Filtergleichungen ohne Sprungterm entnimmt man den Ausführungen von Satz 9 aus [37] und die Gestalt des Korrekturterms aus (3.5). Mit Aussage

$$\int_{\mathcal{Z}} \gamma(p_{t-}, z) \tilde{I}(dt \times dz) = \int_{\mathcal{Z}} \gamma(p_{t-}, z) I(dt \times dz)$$

gemäß Proposition 3.1 aus [17] ist alles gezeigt.

q.e.d.

Wegen der Normierungseigenschaft

$$\sum_{k=1}^d p^k = 1 \quad (3.8)$$

und der Eigenschaft der  $p^j$  Wahrscheinlichkeiten zu sein, ist der Simplex

$$\tilde{\mathcal{S}} := \{p \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^d p^j = 1, p^j \geq 0 \forall j\} \quad (3.9)$$

der Wertebereich für die Werte  $p_t$  der Lösung des stochastischen Differentialgleichungssystems (abgekürzt SDGLS) (3.6). Darüberhinaus können wir wegen (3.8) das  $d$ -dimensionale SDGLS (3.6) auf die Lösung der ersten  $d - 1$  Gleichungen reduzieren. Sei

$$\mathcal{S} := \left\{ \pi \in \mathbb{R}^{d-1} : \sum_{i=1}^{d-1} \pi_i \leq 1, \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, d-1 \right\}, \quad (3.10)$$

und  $\overset{\circ}{S}$  das Innere von  $\mathcal{S}$ , dann geht vermöge der Transformation

$$p = \mathcal{P}\pi : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}, (\pi_1, \dots, \pi_{d-1}) \longmapsto (\pi_1, \dots, \pi_{d-1}, 1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi_i) \quad (3.11)$$

mit  $(\pi_1, \dots, \pi_{d-1}) := (p_1, \dots, p_{d-1})$  das  $d$ -dimensionale SDGLS (3.6) in das  $(d - 1)$ -dimensionale SDGLS

$$d\Pi_t = \alpha(\Pi_t)dt + \beta^\top(\Pi_t)dB_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_{t-}, z) \tilde{I}(dt \times dz) \quad (3.12)$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$\alpha(\pi) := (\alpha_1(\pi), \dots, \alpha_{d-1}(\pi))^\top \in \mathbb{R}^{d-1} \quad (3.13)$$

$$\beta(\pi) := (\beta_1(\pi), \dots, \beta_{d-1}(\pi)) \in \mathbb{R}^{n \times d-1} \quad (3.14)$$

$$\gamma(\pi, z) := (\gamma_1(\pi, z), \dots, \gamma_{d-1}(\pi, z)) \in \mathbb{R}^{d-1} \quad (3.15)$$

über. Hierbei ergeben sich für  $j = 1, \dots, d - 1$  obige Koeffizienten vermöge der Transformation (3.11) unter Verwendung der Filterkoeffizienten  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\gamma}$  aus (3.3), (3.4) und

(3.7) gemäß:

$$\begin{aligned}\alpha_j(\pi) &:= \tilde{\alpha}_j(\mathcal{P}\pi) = \sum_{i=1}^d q_{ij} p^i = \sum_{i=1}^{d-1} q_{ij} p^i + q_{dj} \left(1 - \sum_{i=1}^{d-1} p^i\right) \\ &= q_{dj} + \sum_{i=1}^{d-1} (q_{ij} - q_{dj}) \pi^i\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\beta_j(\pi) &:= \tilde{\beta}_j(\mathcal{P}\pi) = p^j \sigma^{-1} \left( \mu_j - \sum_{i=1}^d p^i \mu_i \right) = p^j \sigma^{-1} \left( \mu_j - \sum_{i=1}^{d-1} p^i \mu_i - \mu_d \left(1 - \sum_{i=1}^{d-1} p^i\right) \right) \\ &= \pi^j \sigma^{-1} \left( \mu_j - \mu_d + \sum_{i=1}^{d-1} (\mu_d - \mu_i) \pi^i \right)\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\gamma_j(\pi, z) := \tilde{\gamma}_j(\mathcal{P}\pi, z) = p^j \left( \frac{f_j(z)}{\bar{f}(z, \mathcal{P}\pi)} - 1 \right) = \pi^j \left( \frac{f_j(z)}{\bar{f}(z, \pi)} - 1 \right)\quad (3.18)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{f}(z, \pi) := \check{f}(z, \mathcal{P}\pi) &= \sum_{i=1}^d f_i(z) p^i = \sum_{i=1}^{d-1} f_i(z) \pi^i + f_d(z) \left(1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i\right) \\ &= f_d(z) + \sum_{i=1}^{d-1} \left( f_i(z) - f_d(z) \right) \pi^i.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Darüberhinaus erhalten wir für die Schätzung  $\mu(p_t)$  aus (3.1) der Drift  $\mu_t$  unter der Transformation (3.11)

$$\hat{\mu}(\pi) := \mu(\mathcal{P}\pi) = \mu_d + \sum_{i=1}^{d-1} \left( \mu_i - \mu_d \right) \pi^i.\quad (3.20)$$

Mit diesen Überlegungen können wir die Renditen

$$\begin{aligned}dR_t &= \mu(Y_t) dt + \sigma dW_t \\ &= \hat{\mu}(\Pi_t) dt + \sigma dB_t\end{aligned}$$

aus der Lösung  $\Pi_t$  der Filtergleichung (3.12) und dem Innovationsprozess  $B_t$  rekonstruieren. An dieser Stelle erfolgt schließlich die Transformation auf vollständige Information. Wir erweitern zu diesem Zweck Zustand  $X$  auf den Zustand  $(X, \Pi)$  mit der Dynamik

$$\begin{aligned}\frac{dX_t^{(h)}}{X_t^{(h)}} &= h_t^\top \hat{\mu}(\Pi_t) dt + h_t^\top \sigma dB_t, \quad X_0^{(h)} = x_0, \\ d\Pi_t &= \alpha(\Pi_t) dt + \beta^\top(\Pi_t) dB_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_{t-}, z) \tilde{I}(dt \times dz).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Mit diesen Überlegungen kann man somit das Vermögen  $X_t^{(h)}$  als  $\mathbb{F}$ -adaptierten stochastischen Prozess betrachten, welcher einer vom Innovationsprozess  $B_t$  getriebenen stochastischen Differentialgleichung genügt. Eine einfache Anwendung der Itô-Formel ergibt

$$X_t^{(h)} = x_0 \exp \left\{ \int_0^t (h_s^\top \hat{\mu}(\Pi_s) - \frac{1}{2} \|\sigma^\top h_s\|_2^2) ds + \int_0^t h_s^\top \sigma dB_s \right\}. \quad (3.22)$$

Im Falle von logarithmischen Nutzen, d.h.  $U(x) := \log x$  erhalten wir nach Lemma 4.1 aus [17] folgenden Satz:

**Satz 3.2.** *Sei  $U(x) := \log x$ , dann berechnet sich die optimale Strategie  $h^* \in \mathcal{H}$  des Nutzenmaximierungsproblems (2.14)*

$$h_t^* = h^*(t, \Pi_t) = (\sigma \sigma^\top)^{-1} \hat{\mu}(\Pi_t) \quad (3.23)$$

mit  $\hat{\mu}$  aus (3.20).

**Bemerkung 3.3.**

- 1.) Die optimale Strategie  $h^*$  ist nach [3] im Fall  $\mu_t = \mu(Y_t)$  für alle  $t \in [0, T]$  unter vollständiger Information, (d.h.  $Y_t$  ist beobachtbar), für die Potenznutzenfunktion  $U(x) = \frac{1}{\theta} x^\theta$  durch

$$h_t^* = \frac{1}{1 - \theta} (\sigma \sigma^\top)^{-1} \mu_t \quad (3.24)$$

gegeben. Setzt man  $\theta = 0$  ergibt sich gleichfalls die optimale Strategie für logarithmischen Nutzen, vgl. Bemerkung 2.2.

- 2.) Im Falle unvollständiger Information (d.h. unbeobachtbarer Drift  $\mu(Y_t)$ ) genügt es nach Satz 3.23 bei logarithmischem Nutzen im Ausdruck (3.24) die Drift  $\mu_t$  durch ihre Schätzung  $\hat{\mu}_t$  aus (3.20) zu ersetzen. Diesen Sachverhalt bezeichnet man in der englischsprachigen Literatur auch als certainty equivalence principle. Bei verwendetem Potenznutzen wird sich die optimale Strategie unter unvollständiger Information nicht durch bloßes Ersetzen der Drift  $\mu_t$  durch den Filter berechnen lassen, sondern es wird noch ein additiver Korrekturterm auftreten, wie sich im Folgenden herausstellen wird. (vgl. (3.42) aus Bemerkung 3.7)
- 3.) Ersetzt man in der Strategie (3.24) die Drift  $\mu_t$  durch den Filter  $\mu(p_t)$  (bzw. nach der Transformation  $p = \mathcal{P}\pi$  durch  $\tilde{\mu}(\Pi_t)$ ), dann bezeichnen wir im Weiteren obige Strategie als myopische Strategie  $h_{myop}$ .

Im Falle der Potenznutzenfunktion  $U(x) = \frac{1}{\theta} x^\theta$  und  $\theta \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$  ist die Berechnung der optimalen Strategie deutlich komplizierter. Auf der Basis von Formel (3.21) formulieren wir das Nutzenmaximierungsproblem daher zunächst folgendermaßen um: unter Verwendung

der Nutzenfunktion

$$\begin{aligned}
 U(X_T^{(h)}) &= \frac{1}{\theta} \left( X_T^{(h)} \right)^\theta = \frac{1}{\theta} x_0^\theta \exp \left\{ \theta \int_0^T \left( h_s^\top \widehat{\mu}(\Pi_s) - \frac{1}{2} \|\sigma^\top h_s\|_2^2 \right) ds + \theta \int_0^T h_s^\top \sigma dB_s \right\} \\
 &= \frac{x_0^\theta}{\theta} \exp \left\{ \int_0^T \theta h_s^\top \sigma dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta \sigma^\top h_s\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta \sigma^\top h_s\|_2^2 ds \right. \\
 &\quad \left. + \theta \int_0^T \left( h_s^\top \widehat{\mu}(\Pi_s) - \frac{1}{2} \|\sigma^\top h_s\|_2^2 \right) ds \right\} \\
 &= \frac{x_0^\theta}{\theta} Z_T \exp \left\{ \int_0^T \theta \left( h_s^\top \widehat{\mu}(\Pi_s) - \frac{1-\theta}{2} \|\sigma^\top h_s\|_2^2 \right) ds \right\}
 \end{aligned}$$

mit

$$Z_T = \exp \left\{ \int_0^T \theta h_s^\top \sigma dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta \sigma^\top h_s\|_2^2 ds \right\}.$$

Insgesamt finden wir mit

$$\widetilde{b}(\pi, h) := -\theta \left( h^\top \widehat{\mu}(\pi) - \frac{1-\theta}{2} \|\sigma^\top h\|_2^2 \right) \quad (3.25)$$

folgendes Zwischenresultat:

$$U(X_T^{(h)}) = \frac{x_0^\theta}{\theta} Z_T^h \exp \left\{ - \int_0^T \widetilde{b}(\Pi_s, h_s) ds \right\}.$$

Der stochastische Prozess  $(\varphi_s)_{s \in [0, T]}$  mit  $\varphi_s := \theta \sigma^\top h_s$  definiert gemäß (A.1) den stochastischen Prozess  $(Z_t)_{t \in [0, T]}$  mit  $Z_t$  wie in (A.2), dessen Endwert  $Z_T$  ist. Da  $h_s \in K$  für alle  $s \in [0, T]$  beschränkt ist und  $\sigma \equiv \text{const}$  erfüllt der Prozess  $\varphi$  die Novikovbedingung (A.3). Damit handelt es sich bei dem stochastischen Prozess  $(Z_t)_{[0, T]}$  um ein Martingal und wir finden  $E^P[Z_T] = E^P[Z_0] = 1$ . Mit dem Maßwechsel

$$Z_T := \frac{d\widetilde{P}}{dP}$$

und dem Girsanov-Theorem ist

$$\widetilde{W}_t := B_t - \int_0^t \varphi_s ds \quad (3.26)$$

ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich dem Maß  $\widetilde{P}$ . In differentieller Schreibweise ist  $dB_t = d\widetilde{W}_t + \varphi_t dt$ , so dass die Filtergleichung (3.6) unter dem neuen Maß  $\widetilde{P}$  in der Gestalt

$$\begin{aligned}
 d\Pi_t^{(h)} &= \left( \alpha(\Pi_t^{(h)}) + \beta^\top(\Pi_t^{(h)}) \theta \sigma^\top h_t \right) dt + \beta^\top(\Pi_t^{(h)}) d\widetilde{W}_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_{t-}^{(h)}, z) \widetilde{I}(dt \times dz) \\
 \Pi_0^{(h)} &= \check{p}_0
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

erscheint. Insbesondere hängt der durch die Zustandsgleichung (3.27) definierte Prozess  $(\Pi_t^{(h)})_{t \in [0, T]}$  selbst von der Steuerung  $h$  ab. Aus diesem Grund unterscheiden wir zwischen  $\Pi^{(t, \check{\Pi}_t)}$  und  $\Pi^{(t, \check{\Pi}_t, h)}$ . Wir bezeichnen mit  $\Pi^{(t, \check{\Pi}_t)}$  die Lösung der Filtergleichung (3.12) für  $s \in [t, T]$  zum Anfangswert  $\check{\Pi}_t \in \mathcal{S}$  und mit  $\Pi^{(t, \check{\Pi}_t, h)}$  die Lösung der Zustandsgleichung (3.27) für  $s \in [t, T]$  zum Anfangswert  $\check{\Pi}_t \in \mathcal{S}$ . Zu gegebener Steuerung  $h \in \mathcal{H}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} E^P \left[ U(X_T^{(h)}) \right] &= E^P \left( \frac{x_0^\theta}{\theta} Z_T \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \check{\Pi}_0)}, h_s) ds \right\} \right) \\ &= \frac{x_0^\theta}{\theta} E^{\tilde{P}} \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \check{\Pi}_0)}, h_s) ds \right\} \right) \\ &= \frac{x_0^\theta}{\theta} E \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \check{\Pi}_0, h)}, h_s) ds \right\} \right). \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.4.** Für die Richtigkeit der letzten Identität ist es erforderlich, die für das nachfolgende Steuerungsproblem zentrale SDE (3.27) mit einem generischen P-Wiener-Prozess  $W$  auszustatten:

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(h)} &= (\alpha(\Pi_t^{(h)}) + \beta^\top(\Pi_t^{(h)})\theta\sigma^\top h_t)dt + \beta^\top(\Pi_t^{(h)})dW_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_t^{(h)}, z)\tilde{I}(dt \times dz) \\ \Pi_0^{(h)} &= \check{p}_0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

In diesem Fall vereinbaren für die folgenden Ausführungen  $E[\dots] = E^P[\dots]$ .

Nun fassen wir unsere Überlegungen in folgendem Satz zusammen:

**Satz 3.5.** *Mit der Radon-Nikodym-Dichte*

$$Z_T := \exp \left\{ \int_0^T \varphi_t dB_t - \frac{1}{2} \|\varphi_t\|_2^2 ds \right\}, \quad \text{mit } \varphi_t := \theta h_t^\top \sigma$$

und dem Maßwechsel

$$Z_T := \frac{d\tilde{P}}{dP},$$

sowie der vom Innovationsprozeß  $B$  und vom zufälligen Sprungmaß  $\tilde{I}$  getriebenen Filtergleichung (3.6) überführen wir das Nutzenmaximierungsproblem (2.14) für  $\theta \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$  in folgendes Steuerungsproblem :

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \{ E[U(X_T^{(h)})] \} = \begin{cases} \frac{x_0^\theta}{\theta} \sup_{h \in \mathcal{H}} \left\{ E \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \check{p}_0, h)}, h_s) ds \right\} \right) \right\} & \text{für } \theta \in (0, 1) \\ \frac{x_0^\theta}{\theta} \inf_{h \in \mathcal{H}} \left\{ E \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \check{p}_0, h)}, h_s) ds \right\} \right) \right\} & \text{für } \theta < 0 \end{cases}, \tag{3.29}$$

wobei  $\Pi_s^{(0, \check{\Pi}_0, h)}$  Lösung der SDE (3.28) mit Anfangswert  $\Pi_0^{(0, \check{\Pi}_0, h)} = \check{p}_0$  ist.

### 3.2 Dynamic Programming Equation

Im vorigen Paragraphen haben wir in Satz 3.5 das Nutzenmaximierungsproblem (2.14) auf die Optimierung der Zielfunktion

$$E \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \check{p}_0, h)}, h_s) ds \right\} \right)$$

und der diesem Problem zugrunde liegenden Zustandsgleichung (3.28) für  $\Pi^{(h)} = \Pi^{(0, \check{p}_0, h)}$

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(h)} &= (\alpha(\Pi_t^{(h)}) + \beta^\top(\Pi_t^{(h)})\theta\sigma^\top h_t)dt + \beta^\top(\Pi_t^{(h)})dW_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_t^{(h)}, z)\tilde{I}(dt \times dz) \\ \Pi_0^{(h)} &= \check{p}_0 \end{aligned}$$

reduziert. Für alle  $(t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}$  und  $h \in \mathcal{H}$  betten wir mit der Zielfunktion

$$\begin{aligned} v(t, \pi, h) &:= E_{t, \pi} \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(h)}, h_s) ds \right\} \right) \\ &= E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(h)}, h_s) ds \right\} \middle| \Pi_t^{(h)} = \pi \right) \\ &= E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \pi, h)}, h_s) ds \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

das Steuerungsproblem aus Satz 3.5 in eine größere Klasse von Problemen ein, um es dann im Rahmen dieser größeren Klasse zu lösen. In diesem Sinne erhalten wir

$$V(t, \pi) := v(t, \pi, h^*) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \{v(t, \pi, h)\}, \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}. \quad (3.31)$$

Dabei bezeichnet  $V(t, \pi)$  die Wertfunktion und  $h^* \in \mathcal{H}$  die optimale Strategie (sofern sie existiert). Wegen  $v(T, \pi, h) = 1$  für alle  $h \in \mathcal{H}$  gilt auch  $V(T, \pi) = 1$ . Nun erfolgt ein Übergang von den deterministischen Funktionen  $v(t, \pi, h)$  und  $V(t, \pi)$  zu den durch diese Funktionen definierten Prozessen  $M_t^{(h)} = V(t, \Pi_t^{(h)})$ , in dem anstelle des festen Wertes  $\pi$  der Wert des Zustandsprozesses  $\Pi_t^{(h)}$  eingesetzt wird. Mit Hilfe dieser Prozesse wird es gelingen, eine deterministische partielle Integrodifferentialgleichung (PIDE) herzuleiten, mit welcher man einen Kandidaten für die optimale Strategie  $h^*$  gewinnen kann. Nach den Ausführungen des Buches von Hanson [23], 162ff, ist Gleichung (3.28) eine Markov-SDE, deren Lösung somit für ein hinreichend integrabiles  $g$  die Markoveigenschaft

$$E(g(\Pi_{t+s}^{(h)}) | \mathcal{F}_t^\Pi) = E(g(\Pi_{t+s}^{(h)}) | \Pi_t^{(h)})$$

besitzt. Nach Definition der bedingten Erwartung ist für beliebige stochastische Prozesse  $X, Y$

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} v(t, \Pi_t^{(h)}, h) &= E\left(\exp\left\{-\int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(h)}, h_s) ds\right\} \middle| \Pi_t^{(h)}\right) \\ &= E\left(\exp\left\{-\int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(h)}, h_s) ds\right\} \middle| \sigma(\Pi_t^{(h)})\right). \end{aligned}$$

Wegen  $\sigma(\Pi_t^{(h)}) \subset \mathcal{F}_t^\Pi := \sigma(\Pi_u^{(h)} : u \leq t)$  und der Markoveigenschaft berechnen wir für beliebiges  $h \in \mathcal{H}$ ,  $t \leq u \leq T$

$$\begin{aligned} V(t, \Pi_t^{(h)}) &\geq v(t, \Pi_t^{(h)}, h) \\ &= E\left(\exp\left\{-\int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} \middle| \mathcal{F}_t^\Pi\right) \\ &= E\left(\exp\left\{-\int_t^u \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds - \int_u^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} \middle| \mathcal{F}_t^\Pi\right) \\ &= E(XY | \mathcal{F}_t^\Pi) \end{aligned} \quad (3.32)$$

mit

$$X := \exp\left\{-\int_t^u \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} \text{ und } Y := \exp\left\{-\int_u^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\}.$$

Mit der Turmeigenschaft für bedingte Erwartungswerte berechnen wir schließlich wegen  $\mathcal{F}_t^\Pi \subset \mathcal{F}_u^\Pi$  unter Verwendung der  $\mathcal{F}_u^\Pi$ -Meßbarkeit von  $X$

$$\begin{aligned} v(t, \Pi_t^{(h)}, h) &= E(XY | \mathcal{F}_t^\Pi) = E(E(XY | \mathcal{F}_u^\Pi) | \mathcal{F}_t^\Pi) = E(XE(Y | \mathcal{F}_u^\Pi) | \mathcal{F}_t^\Pi) \\ &= E\left(\exp\left\{-\int_t^u \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} E\left(\exp\left\{-\int_u^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} \middle| \mathcal{F}_u^\Pi\right) \middle| \mathcal{F}_t^\Pi\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Mit

$$\begin{aligned} \Lambda_u^{(h)} &:= \exp\left\{-\int_0^u \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \Pi_0^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_0^t \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \Pi_0^{(h)}, h)}, h_s) ds - \int_t^u \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} \end{aligned}$$

finden wir

$$\exp\left\{-\int_t^u \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \Pi_t^{(h)}, h)}, h_s) ds\right\} = \frac{\Lambda_u^{(h)}}{\Lambda_t^{(h)}}. \quad (3.34)$$

An dieser Stelle erhalten wir mit (3.33) und (3.34) zunächst

$$V(t, \Pi_t^{(h)}) \geq v(t, \Pi_t^{(h)}, h) = E\left[\frac{\Lambda_u^{(h)}}{\Lambda_t^{(h)}} \cdot v(u, \Pi_u^{(h)}, h) \middle| \mathcal{F}_t^\Pi\right] \quad (3.35)$$



Hieraus gewinnen wir durch Multiplikation mit  $\Lambda_t^{(h)}$  und der  $\mathcal{F}_t^\Pi$ -Messbarkeit von  $\Lambda_t^{(h)}$

$$V(t, \Pi_t^{(h)})\Lambda_t^{(h)} \geq v(t, \Pi_t^{(h)}, h)\Lambda_t^{(h)} = E\left(\Lambda_u^{(h)} \cdot v(u, \Pi_u^{(h)}, h) \mid \mathcal{F}_t^\Pi\right) \quad (3.36)$$

zunächst die Martingaleigenschaft von  $v(t, \Pi_t^{(h)}, h)\Lambda_t^{(h)}$ . Da in obiger Rechnung  $h \in \mathcal{H}$  beliebig ist, wählen wir unter der Annahme der Existenz der optimale Strategie  $h^* \in \mathcal{H}$  die zusammengesetzte Strategie

$$\tilde{h}_s := \begin{cases} h_s : s \in [0, u] \\ h_s^* : s \in [u, T] \end{cases}.$$

Mit  $0 < t < u < T$  ist

$$v(u, \Pi_u^{(h)}, \tilde{h}) = v(u, \Pi_u^{(h)}, h^*) = V(u, \Pi_u^{(h)}),$$

woraus sich zusammen mit (3.36) die Supermartingaleigenschaft von  $V(t, \Pi_t^{(h)})\Lambda_t^{(h)}$  ergibt:

$$V(t, \Pi_t^{(h)})\Lambda_t^{(h)} \geq E\left(\Lambda_u^{(h)} \cdot V(u, \Pi_u^{(h)}) \mid \mathcal{F}_t^\Pi\right). \quad (3.37)$$

Nun gehen wir auch im Zustand  $\Pi_t^{(h)}$  zur optimalen Strategie  $h^*$  über. Damit wird  $\Pi^{(h)}$  zu  $\Pi^{(h^*)}$  und  $\Lambda^{(h)}$  zu  $\Lambda^{(h^*)}$ . Damit finden wir das  $V(t, \Pi_t^{(h)})\Lambda_t^{(h)}$  unter der Bedingung  $h = h^*$  ein Martingal ist:

$$V(t, \Pi_t^{(h^*)})\Lambda_t^{(h^*)} = E\left[V(u, \Pi_u^{(h^*)})\Lambda_u^{(h^*)} \mid \mathcal{F}_t^\Pi\right], \quad 0 \leq t \leq u \leq T.$$

Um den folgenden Satz formulieren zu können geben wir an dieser Stelle mit  $r$  als fixiertem Wert von  $h_t$  den Generator  $\mathcal{L}^{(r)}$  des Zustandsprozesses  $\Pi$  aus Gleichung (3.28) an. Theorem 1.22 des Buches von Øksendal und Sulem [44] entnimmt man folgende Aussage: Für  $g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S})$  und  $\mathcal{S}$  gemäß (3.10) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(r)}g(\pi) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d-1} \beta_i^\top(\pi) \beta_j(\pi) \partial_{\pi^i \pi^j}^2 g(\pi) + \sum_{i=1}^{d-1} (\alpha_i(\pi) + \theta \beta^\top(\pi) \sigma^\top r) \partial_{\pi^i} g(\pi) \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{g(\pi + \gamma(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi) dz \end{aligned} \quad (3.38)$$

mit den Koeffizientenfunktionen  $\alpha_j(\pi)$  aus (3.16),  $\beta_j(\pi)$  gemäß (3.17) und dem Sprungkoeffizienten  $\gamma_j(\pi, z)$  aus (3.18) für  $j = 1, \dots, d-1$ .

**Satz 3.6.** *Für die Wertfunktion  $V = V(t, \pi)$  aus (3.31) gelte  $V \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T) \times \mathring{S}) \cap \mathcal{C}^0([0, T) \times S)$ , dann genügt  $V$  der Dynamic Programming Equation (DPE)*

$$\partial_t V(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{\mathcal{L}^{(r)}V(t, \pi) - \tilde{b}(\pi, r)V(t, \pi)\} = 0 \quad (3.39)$$

$$V(T, \pi) = 1,$$

mit dem Generator  $\mathcal{L}^{(r)}$  des Zustandsprozesses  $\Pi$  gemäß (3.38) und  $\tilde{b}$  aus (3.25).

*Beweis:* Anwendung der Itô-Produktregel (Satz A.19) auf  $\Lambda_t^{(h)}V(t, \Pi_t^{(h)})$  und die stetige Differenzierbarkeit (und die folglich beschränkte Variation) von  $\Lambda_t^{(h)}$  ergibt  $[\Lambda, V]_t = 0$ . Damit reduziert sich die Itô-Produktregel zu

$$d(\Lambda_t^{(h)}V(t, \Pi_t^{(h)})) = V(t, \Pi_t^{(h)})d\Lambda_t^{(h)} + \Lambda_t^{(h)}dV(t, \Pi_t^{(h)}).$$

Mit

$$d\Lambda_t^{(h)} = -\tilde{b}(\Pi_t^{(h)}, h)\Lambda_t^{(h)}dt$$

und der Itô-Formel für Semimartingale in differentieller Form (A.18) angewandt auf die Funktion  $V(t, \Pi_t^{(h)})$  des  $(d-1)$ -dimensionalen Diffusions-Sprungprozesses  $\Pi_t^{(h)}$  aus (3.28) berechnen wir

$$\begin{aligned} dV(t, \Pi_t^{(h)}) &= \partial_t V(t, \Pi_t^{(h)})dt + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi_j} V(t, \Pi_t^{(h)})d\Pi_t^j + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V(t, \Pi_t^{(h)})d[\Pi^k, \Pi^l]_t^c \\ &+ \int_{\mathcal{Z}} \left( V(t, \Pi_t^{(h)} + \gamma(\Pi_t^{(h)}, z)) - V(t, \Pi_t^{(h)}) - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi_j} V(t, \Pi_t^{(h)})\gamma_j(\Pi_t^{(h)}, z) \right) I(dt \times dz). \end{aligned}$$

Mit

$$\Delta \Pi_{T_k}^j := \gamma_j(\Pi_{T_k-}^{(h)}, Z_k)$$

gemäß (3.18),

$$\hat{\alpha}_j(\Pi_t^{(h)}, h) = \alpha_j(\Pi_t^{(h)}) + \beta_j^\top(\Pi_t^{(h)})\theta\sigma^\top h$$

und

$$d[\Pi^k, \Pi^l]_t^c = \beta_k^\top(\Pi_t^{(h)})\beta_l(\Pi_t^{(h)})dt$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} d(\Lambda_t^{(h)}V(t, \Pi_t^{(h)})) &= V(t, \Pi_t^{(h)})d\Lambda_t^{(h)} + \Lambda_t^{(h)}dV(t, \Pi_t^{(h)}) \\ &= -V(t, \Pi_t^{(h)})\tilde{b}(\Pi_t^{(h)}, h)\Lambda_t^{(h)}dt + \Lambda_t^{(h)} \left[ \partial_t V(t, \Pi_t^{(h)})dt \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi_j} V(t, \Pi_t^{(h)}) \left( \hat{\alpha}_j(\Pi_t^{(h)}, h)dt + \beta_j^\top(\Pi_t^{(h)})dW_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma_j(\Pi_t^{(h)}, z)I(dt \times dz) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V(t, \Pi_t^{(h)})\beta_k^\top(\Pi_t^{(h)})\beta_l(\Pi_t^{(h)})dt \\ &\left. + \int_{\mathcal{Z}} \left( V(t, \Pi_t^{(h)}) - V(t, \Pi_t^{(h)}) - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi_j} V(t, \Pi_t^{(h)})\gamma_j(\Pi_t^{(h)}, z) \right) I(dt \times dz) \right]. \quad (3.40) \end{aligned}$$

Durch Übergang zum  $\mathbb{F}$ -kompensierten Maß  $\tilde{I}(dt \times dz) = I(dt \times dz) - \lambda \bar{f}(z, \Pi_t^{(h)}) dt dz$  finden wir

$$\begin{aligned}
 & d(\Lambda_t^{(h)} V(t, \Pi_t^{(h)})) \\
 = & \Lambda_t^{(h)} \left[ -V(t, \Pi_t^{(h)}) \tilde{b}(\Pi_t^{(h)}, h) + \partial_t V(t, \Pi_t^{(h)}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V(t, \Pi_t^{(h)}) \beta_k^\top(\Pi_t^{(h)}) \beta_l(\Pi_t^{(h)}) \right. \\
 & + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi^j} V(t, \Pi_t^{(h)}) \hat{\alpha}_j(\Pi_t^{(h)}, h) dt \\
 & + \lambda \int_{\mathcal{Z}} (V(t, \Pi_t^{(h)} + \gamma(\Pi_t^{(h)}, z)) - V(t, \Pi_t^{(h)})) \bar{f}(\Pi_t^{(h)}, z) dz \Big] dt \\
 & + \Lambda_t^{(h)} \left[ \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi^j} V(t, \Pi_t^{(h)}) \beta_j^\top(\Pi_t^{(h)}) dW_t \right. \\
 & \left. + \lambda \int_{\mathcal{Z}} (V(t, \Pi_t^{(h)} + \gamma(\Pi_t^{(h)}, z)) - V(t, \Pi_t^{(h)})) \tilde{I}(dt \times dz) \right]
 \end{aligned}$$

Nun ist wegen (3.35) der Prozess  $\Lambda_t^{(h)} V(t, \Pi_t^{(h)})$  ein Supermartingal. Insbesondere ist damit die Drift dieses Prozesses kleiner gleich Null und nimmt nur im Falle einer optimalen Strategie  $h^* \in \mathcal{H}$  ihr Maximum bei Null an. Da der Prozess  $\Pi_t^{(h)}$  beliebige Werte  $\pi \in \mathcal{S}$  annehmen kann, genügt die Wertfunktion und unter der Annahme

$$V \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathring{\mathcal{S}}) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathcal{S})$$

und wegen (3.30) der notwendigen Bedingung:

$$\partial_t V(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{ \mathcal{L}^r V(t, \pi) - \tilde{b}(\pi, r) V(t, \pi) \} = 0, \quad V(T, \pi) = 1$$

bzw. in ausgeschriebener Form

$$\begin{aligned}
 0 = & \partial_t V(t, \pi) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top(\pi) \beta_l(\pi) \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V(t, \pi) + \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j(\pi) \partial_{\pi^j} V(t, \pi) \\
 & + \lambda \int_{\mathcal{Z}} (V(t, \pi + \gamma(\pi, z)) - V(t, \pi)) \bar{f}(\pi, z) dz \\
 & + \sup_{r \in \mathcal{K}} \left\{ \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi^j} V(t, \pi) \beta_j^\top(\pi) \theta \sigma^\top r + V(t, \pi) \theta \left( r^\top \hat{\mu}(\pi) - \frac{1-\theta}{2} \|\sigma^\top r\|_2^2 \right) \right\}. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

q.e.d.

**Bemerkung 3.7.**

- 1) Ob die soeben hergeleitete Gleichung (3.39) eine klassische Lösung besitzt ist ein offenes Problem. Unter der Annahme der Existenz einer klassischen Lösung, können wir durch Supremumsbildung im Ausdruck (3.41) einen Kandidaten für die optimale Strategie finden. Hierfür bemerken wir zunächst, dass die Argumentfunktion des Supremums in (3.41), ein in  $r$  quadratischer Ausdruck ist, der wegen der positiven Definitheit von  $\sigma\sigma^\top$  darüber hinaus auch konkav ist. Aus diesem Grund wird das Supremum auf der konvexen Menge  $\mathcal{K}$  für ein  $r^*$  in eindeutiger Weise angenommen. Wegen  $h \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathcal{S}, \mathbb{R})$  ist  $h$  Lipschitzstetig. Damit existiert eine starke Lösung  $\Pi^*$  der SDGL (3.28) und es ist  $h_t = r^*(t, \Pi_t^*)$ . Nach einem Verifikationssatz, Theorem 5.5 aus [13], oder auch Theorem 3.1 aus [16], handelt es sich bei  $V$  um die Wertfunktion des Steuerungsproblems (3.29) und  $h_t^* := r^*(t, \Pi_t^*)$  ist die optimale Strategie. Sofern für alle  $(t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}$  auch  $r^*(t, \pi) \in \mathring{\mathcal{K}}$  richtig ist, finden wir für  $r^*$  einen expliziten Ausdruck: Bildung des Gradienten liefert die notwendige Bedingung

$$\sigma \sum_{k=1}^{d-1} \beta_k^\top(\pi) \partial_{\pi^k} V(t, \pi) + V(t, \pi) (\hat{\mu}(\pi) - (\sigma\sigma^\top)^{-1} r(1 - \theta)) = 0.$$

Umstellen nach  $r$  ergibt unter der Annahme  $r^* \in \mathring{\mathcal{K}}$

$$h^*(t, \pi) = r^*(t, \pi) = \frac{1}{1 - \theta} (\sigma\sigma^\top)^{-1} \left\{ \hat{\mu}(\pi) + \frac{1}{V(t, \pi)} \sigma \sum_{k=1}^{d-1} \beta_k^\top(\pi) \partial_{\pi^k} V(t, \pi) \right\} \quad (3.42)$$

einen Kandidaten für die optimale Strategie  $h^* \in \mathcal{H}$ .

- 2) Wir bereits erwähnt ist  $h^*$  gemäß (3.42) nur dann richtig, sofern

$$h^*(t, \pi) \in \mathring{\mathcal{K}} \quad \forall (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}. \quad (3.43)$$

Diese Annahme können wir aber mit folgender Überlegung rechtfertigen: Unter der Annahme der Existenz einer Lösung der PIDE (3.39) ist  $|\partial_{\pi_i} V(t, \pi)| < \tilde{C}$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ ,  $\forall (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}$ . Wegen  $\pi \in \mathcal{S}$  und  $h \in \mathcal{K}$  ist  $|\tilde{b}(\pi, h)| \leq C_b$  und folglich

$$v(t, \pi, h) = E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s, h_s) ds \right\} \right) \in [e^{-C_b T}, e^{+C_b T}].$$

Damit ist  $V$  beschränkt. Da auch alle anderen vorkommenden Ausdrücke in (3.42) ebenfalls beschränkt sind, können wir gemäß Definition 2.3 eine Menge  $\mathcal{K}$  mit hinreichend großem Diameter angeben, so dass (3.43) richtig ist.

**Satz 3.8.** Für  $\beta_j(\pi)$  aus (3.17) definieren wir die  $n \times (d-1)$ -matrixwertige Funktion  $\beta = \beta(\pi) = (\beta_1, \dots, \beta_{d-1})$ , als auch die vektorwertige Funktion

$$A(\pi) = \alpha(\pi) + \frac{\theta}{1 - \theta} \beta^\top(\pi) \sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi),$$

mit  $\alpha(\pi) = (\alpha_1(\pi), \dots, \alpha_{d-1}(\pi))^\top$  und  $\alpha_j(\pi)$  wie in (3.16) und  $\pi \in \mathcal{S}$ , sowie die skalare Funktion

$$C(\pi) = \frac{\theta}{1-\theta} \|\sigma^{-1}\hat{\mu}(\pi)\|^2.$$

Sei  $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathring{\mathcal{S}}) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathcal{S})$  klassische Lösung der PIDE

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\beta(\pi)^\top \beta(\pi) D_\pi^2 G(t, \pi)] + A^\top(\pi) D_\pi G(t, \pi) + C(\pi) G(t, \pi) \\ &\quad + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(t, \pi) \int_{\mathcal{Z}} \{G^{1-\theta}(t, \pi + \gamma(\pi, z)) - G^{1-\theta}(t, \pi)\} \bar{f}(z, \pi) dz \\ 1 &= G(T, \pi) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Hierbei bezeichnet  $D_\pi^2 G$  die Hesse Matrix von  $G$  und  $D_\pi G$  den Gradienten von  $G$ , welche jeweils ausschließlich Ableitungen nach  $\pi$  enthalten. Setzen wir weiterhin  $V(t, \pi) := G^{1-\theta}(t, \pi)$ , dann genügt  $V$  der PIDE (3.39).

*Beweis:* Aus Gründen der Übersicht definieren wir die Hilfsgröße

$$c = c(t, \pi) := \sum_{k=1}^{d-1} \beta_k(\pi) \partial_{\pi^k} V(t, \pi) \in \mathbb{R}^n.$$

Damit erscheint der Kandidat für die optimale Strategie  $h^*(t, \pi) = r^*(t, \pi)$  in der Gestalt

$$h^* = \frac{1}{1-\theta} (\sigma^\top)^{-1} \left\{ \sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi) + \frac{c}{V} \right\}.$$

Nun lösen wir in Gleichung (3.39) das Supremum auf, in dem wir den Kandidaten für die optimale Strategie  $h^*$  einsetzen und berechnen:

$$\begin{aligned} &\sup_{r \in \mathcal{K}} \left\{ \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\pi^j} V \beta_j^\top(\pi) \theta \sigma^\top r + V \theta (r^\top \hat{\mu}(\pi) - \frac{1-\theta}{2} \|\sigma^\top r\|_2^2) \right\} \\ &= \sup_{r \in \mathcal{K}} \left\{ \theta (c^\top \sigma^\top r + V r^\top \hat{\mu}(\pi) - \frac{1-\theta}{2} V \|\sigma^\top r\|_2^2) \right\} \\ &= \frac{\theta}{1-\theta} \left( c^\top \left\{ \sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi) + \frac{c}{V} \right\} + V \left\{ (\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi))^\top + \frac{c^\top}{V} \right\} \sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi) - \frac{1}{2} V \|\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi) + \frac{c}{V}\|^2 \right) \\ &= \frac{\theta}{1-\theta} \left( \frac{1}{2V} \|c\|^2 + (\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi))^\top c + \frac{1}{2} V \|\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Somit erhalten wir für Gleichung (3.39) Folgendes:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t V(t, \pi) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top(\pi) \beta_l(\pi) \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V(t, \pi) + \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j(\pi) \partial_{\pi^j} V(t, \pi) \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{Z}} (V(t, \pi + \gamma(\pi, z)) - V(t, \pi)) \bar{f}(\pi, z) dz \\ &\quad + \frac{\theta}{1-\theta} \left( \frac{1}{2V} \|c\|^2 + (\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi))^\top c + \frac{1}{2} V \|\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

An dieser Stelle transformieren wir obige Gleichung vermöge

$$G(t, \pi) := V^{\frac{1}{1-\theta}}(t, \pi) \quad (3.47)$$

und erhalten für die Ableitungen die Umrechnungsregeln

$$\begin{aligned} \partial_t V &= (1 - \theta)G^{-\theta} \partial_t G \\ \partial_{\pi^k} V &= (1 - \theta)G^{-\theta} \partial_{\pi^k} G \\ \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V &= (1 - \theta)G^{-\theta} \left( -\theta G^{-1} \partial_{\pi^k} G \partial_{\pi^l} G + \partial_{\pi^k \pi^l}^2 G \right). \end{aligned}$$

- 1) Zunächst transformieren wir die Terme zweiter Ableitung und die Terme der Produkte aus den ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top \beta_l \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V + \frac{\theta}{2(1-\theta)V} \|c\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top \beta_l \partial_{\pi^k \pi^l}^2 V + \frac{\theta}{(1-\theta)V} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top \beta_l \partial_{\pi^k} V \partial_{\pi^l} V \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top \beta_l (1-\theta)G^{-\theta} \left( -\frac{\theta}{G} \partial_{\pi^k} G \partial_{\pi^l} G + \partial_{\pi^k \pi^l}^2 G \right) \right. \\ & \quad \left. + \beta_k^\top \beta_l \frac{\theta}{(1-\theta)G^{1-\theta}} (1-\theta)^2 G^{-2\theta} \partial_{\pi^k} G \partial_{\pi^l} G \right) \\ &= \frac{1-\theta}{2} G^{-\theta} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_k^\top \beta_l \partial_{\pi^k \pi^l}^2 G = \frac{1-\theta}{2} G^{-\theta} \text{tr} [\beta^\top \beta D_\pi^2 G]. \end{aligned}$$

- 2) Für die Terme erster Ableitung ergibt sich mit  $c = \sum_{k=1}^{d-1} \beta_k \partial_{\pi^k} V = \beta D_\pi V$  und  $D_\pi V = (1-\theta)G^{-\theta} D_\pi G$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j \partial_{\pi^j} V + \frac{\theta}{1-\theta} (\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi))^\top c &= \alpha^\top D_\pi V + \frac{\theta}{1-\theta} (\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi))^\top \beta D_\pi V \\ &= \left( \alpha + \frac{\theta}{1-\theta} \beta^\top \sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi) \right)^\top (1-\theta)G^{-\theta} D_\pi G \\ &= (1-\theta)G^{-\theta} A(\pi)^\top D_\pi G. \end{aligned}$$

- 3) Für die restlichen Terme berechnen wir ohne weiteres

$$\frac{\theta}{2(1-\theta)} V \|\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi)\|^2 = \frac{\theta}{2(1-\theta)} G^{-\theta} G \|\sigma^{-1} \hat{\mu}(\pi)\|^2 = (1-\theta)G^{-\theta} C(\pi)G.$$

Anschließend ersetzen wir die transformierten Terme in Gleichung (3.8), und erhalten DPE

$$\begin{aligned} 0 = & (1 - \theta)G^{-\theta}\partial_t G + \frac{1 - \theta}{2}G^{-\theta} \operatorname{tr} [\beta^\top \beta D^2 G] + (1 - \theta)G^{-\theta} A^\top D_\pi G + (1 - \theta)G^{-\theta} CG \\ & + \lambda \int_{\mathcal{Z}} \left\{ G^{1-\theta}(t, \pi + \gamma(\pi, z)) - G^{1-\theta}(t, \pi) \right\} \bar{f}(\pi, z) dz \end{aligned}$$

Division durch  $(1 - \theta)G^{-\theta}$  ergibt schließlich die Behauptung.

q.e.d.

**Bemerkung 3.9.** Die Gleichung (3.46) ist sowohl im differentiellen als auch integralen Anteil nichtlinear. Die Nichtlinearität im Integralteil entsteht dabei durch die argumentverschiebende Funktion  $\gamma$ . Mit der Transformation (3.47) können wir den differentiellen Anteil der Gleichung linearisieren. Dabei entsteht allerdings im Integralteil der Gleichung eine weitere Nichtlinearität. Somit gelingt es wenigstens die Nichtlinearitäten im Integralteil zu sammeln, weshalb die transformierte Gleichung unter numerischen Aspekten vorteilhafter ist.

### 3.3 Regularisierung der Dynamic Programming Equation

Betrachten wir an dieser Stelle erneut die DPE (3.39), so bemerken wir, dass die Frage nach der Existenz einer klassischen Lösung bisher unbeantwortet ist. Die Schwierigkeit dieser Frage gründet sich in der mangelnden Regularität des Hauptteils (hier in Matrixschreibweise)

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\beta(\pi)^\top \beta(\pi) D_\pi^2 G(t, \pi)]$$

der Gleichung. Wäre Gleichung (3.39) gleichmäßig elliptisch, d.h. gäbe es ein Konstante  $c > 0$ , so daß

$$c|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d-1} \{\beta^\top(\pi)\beta(\pi)\}_{ij} \xi_i \xi_j \quad (3.48)$$

für alle  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$  und alle  $\pi \in \mathcal{S}$  richtig ist, dann kann man mit einem Resultat von Davis und Lleo [13] die Existenz einer klassischen Lösung sichern. Folglich ist gleichmäßige Elliptizität der Gleichung mit der gleichmäßigen strengen positiven Definitheit der Matrix  $\beta^\top(\pi)\beta(\pi)$  äquivalent. Hierfür müssen wir allerdings die Existenz nichttrivialer Lösungen der Gleichung  $\beta\xi = 0$  ausschließen, wofür es notwendigerweise der Bedingung  $n \geq d - 1$  bedarf. Dies stellt jedoch eine Einschränkung an die Allgemeinheit des Modells dar und ist somit sehr unbefriedigend. Aus diesem Grund bieten sich grundsätzlich zwei Alternativen an:

- 1.) In dem der vorliegenden Schrift zugrundeliegenden Arbeit von Frey, Gabih und Wunderlich [18] zeigen die Autoren, daß die Wertfunktion  $V(t, \pi)$  eine Viskositätslösung

der Gleichung (3.39) ist. Dabei orientieren sie sich an den Argumenten der Ausarbeitung von Pham [45] bzw. Fleming und Soner [16]. Unbefriedigend an diesem Zugang ist, dass er keine Möglichkeit bereitstellt, die optimale Strategie  $h^*(t, \pi)$  zu berechnen.

- 2.) Aus diesem Grund bietet sich ein Zugang an, bei dem man die DPE (3.39) regularisiert. Dies geschieht, indem man im Rahmen der Herleitung der DPE (3.39) dem Zustandsprozess (3.28) den zusätzlichen Term  $\frac{1}{\sqrt{m}}d\tilde{B}_t$ ,  $m \in \mathbb{N}$  hinzufügt. Dabei ist  $\tilde{B}_t$  ein von  $W_t$  stochastisch unabhängiger Wiener Prozess passender Dimension. Als Konsequenz ergibt sich in der zugehörigen DPE der zusätzliche Term  $\frac{1}{2m}\Delta V(t, \pi)$ . Hierbei bezeichnet  $\Delta$  den Laplaceoperator. Dieser zusätzliche Term sichert zwar die gleichmässige Elliptizität der Gleichung, und damit nach [13] die Existenz einer klassischen Lösung  $V^m$ , allerdings ist die aus  $V^m$  gewonnene optimale Strategie  $h^m$  nicht mehr optimal im Sinne des Nutzenmaximierungsproblem (2.14). Im Paper [18] wird allerdings gezeigt, dass es gelingt  $\varepsilon$ -optimale Strategien  $h^m$  zu konstruieren, was im Folgenden noch präzisiert wird.

### 3.3.1 Reformulierung der Zustandgleichung

Gemäß den Ausführungen in (4.1) und (4.2) des Papers von [18] wollen wir im Folgenden für  $\alpha(\pi, h) := \alpha(\pi) + \beta^\top(\pi)\theta\sigma^\top h$  anstelle der Zustandsgleichung (3.28) mit einer modifizierten Zustandsgleichung arbeiten:

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(h)} &= \alpha(\Pi_t^{(h)}, h)dt + \beta^\top(\Pi_t^{(h)})dW_t + \int_{\mathcal{U}} \gamma_N(\Pi_{t-}, u)\tilde{N}(dt \times du) \\ \Pi_0^{(h)} &= \check{p}_0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

mit den Koeffizientenfunktionen  $\alpha(\pi)$ ,  $\beta(\pi)$  aus (3.13), und (3.14). Die Koeffizientenfunktion  $\gamma_N(\pi, u) = (\gamma_{I,1}, \dots, \gamma_{I,d-1})$  werden wir weiter unten angeben. Im Gegensatz zu (3.28) wird in Gleichung (3.49) der Sprungterm durch ein exogenes Poissonsches Zufallsmaß  $\tilde{N}$  getrieben, weil dies die Argumentation in der von [13] und [46] verwendeten Theorie des Dynamic Programming gesteuerter Sprungprozesse erfordert, welcher wir folgen wollen. Hierbei handelt es sich bei  $\tilde{N}$  um ein kompensiertes Sprungmaß eines exogenen Poisson'schen Zufallsmaßes  $N$  mit Kompensator  $\nu(du)\lambda dt$ , so dass  $\tilde{N}(dt, du) = N(dt, du) - \lambda\nu(du)dt$ . Dabei werden sich die Lösungstrajektorien der Zustandsgleichungen (3.28) und (3.49) infolge des Übergang vom zufälligen Sprungmaß  $\tilde{I}$  in (3.28) hin zum exogenen Poisson'schen Zufallsmaß  $\tilde{N}$  in (3.49), im allgemeinen (punktweise) unterscheiden. Dieser Umstand ist allerdings hinsichtlich der Lösung des Nutzenmaximierungsproblems (2.14) nicht von Bedeutung, da nach [18] aus Paragraph 5.1 die inverse Rosenblatt Transformation

$$H: \mathcal{U} := [0, 1]^\nu \longrightarrow \mathcal{Z}, \quad Z = H(\underline{U}), \quad \underline{U} \sim \text{Unif}(\mathcal{U})$$

bei Wahl von

$$\gamma_{N,k}(\pi, u) = \pi_k \left( \frac{f_k(H(u, \pi))}{\bar{f}(H(u, \pi), \pi)} - 1 \right) \quad \text{mit } u \in \mathcal{U}, \quad k = 1, \dots, d-1$$



und  $\bar{f}$  gemäß (3.19) die Verteilungsgesetze der Sprünge in (3.28) und (3.49) gleich läßt. Um nun zu sichern das die Zustandsgleichung (3.49) zu jedem  $h \in \mathcal{H}$  eine eindeutige starke Lösung besitzt, bedarf es hinreichender Regularität der Koeffizientenfunktionen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  auf der Menge  $\mathcal{S}_\varepsilon \supset \mathcal{S}$  mit

$$\mathcal{S}_\varepsilon := \left\{ \pi \in \mathbb{R}^{d-1} : \text{dist}(\pi, \mathcal{S}) \leq \varepsilon \right\}$$

und  $\text{dist}(\pi, \mathcal{S}) := \inf\{|\pi - \pi_0|_\infty : \pi_0 \in \mathcal{S}\}$ . Für das Verständnis der Bedeutung des  $\varepsilon$  und der Menge  $\mathcal{S}_\varepsilon$  verweisen wir auf den Beginn des kommenden Paragraphen. Wir bezeichnen mit

$$\underline{\alpha}(\pi, h) : \mathcal{S}_\varepsilon \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Fortsetzung von

$$\alpha(\pi, h) : \mathcal{S} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf  $\mathcal{S}_\varepsilon$ . Ganz analog die Bedeutung von  $\underline{\beta}$  und  $\underline{\gamma}_N$ . Im Speziellen sind hierfür folgende Wachstums- und Lipschitzbedingungen hinreichend:

**Annahme 3.10.** Seien  $C_L, \bar{\varepsilon} > 0$  und erfülle die Funktion  $\varrho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  die Bedingung  $\int_{\mathcal{U}} \varrho^2(u) \nu(du)$ , so dass für  $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ ,  $u \in \mathcal{U}$  und  $k = 1, \dots, d-1$

$$\begin{aligned} \sup_{h \in \mathcal{K}} |\underline{\alpha}(\pi_1, h) - \underline{\alpha}(\pi_2, h)| + |\underline{\beta}_k(\pi_1) - \underline{\beta}_k(\pi_2)| &\leq C_L |\pi_1 - \pi_2| \\ |\underline{\alpha}(\pi_1, h)| + |\underline{\beta}_k(\pi_1)| &\leq C_L (1 + |\pi_1|) \\ |\underline{\gamma}(\pi_1, u) - \underline{\gamma}(\pi_2, u)| &\leq \varrho(u) |\pi_1 - \pi_2| \\ |\underline{\gamma}(\pi_1, u)| &\leq \varrho(u) (1 + |\pi_1|). \end{aligned}$$

Die Koeffizientenfunktionen  $\underline{\alpha}$  und  $\underline{\beta}$  sind auch auf dem Definitionsbereich  $\mathcal{S}_\varepsilon$  differenzierbare Funktionen und erfüllen wegen der Beschränktheit von  $h$ , die soeben erwähnte Annahme 3.10. Um den Restriktionen an die Funktion  $\underline{\gamma}$  zu genügen, stellen wir für die bedingten Dichten  $f_k(\cdot)$  von  $Z_k$  gegeben  $Y_{T_k}$  die folgende Annahme:

**Annahme 3.11.** Für  $\mathcal{Z}$  aus (2.9) und  $1 \leq k \leq d$  gelte für die bedingten Dichten  $f_k(z)$

$$f_k : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

- 1.) Es existiert ein  $C_1 > 0$  mit  $f_k(z) > C_1$  für alle  $z \in \mathcal{Z}$
- 2.)  $f_k \in C^1(\mathcal{Z}, \mathbb{R}_+)$ .

Wegen Punkt 2.) aus Annahme 3.11 existieren Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  für alle  $1 \leq k \leq d$  mit  $C_1 \leq f_k(z) \leq C_2$ . Damit erfüllt die Koeffizientenfunktion  $\underline{\gamma}_N$  nach Lemma 5.4 aus [18] zu

$$\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} := \frac{C_1}{(d-1)C_2} \tag{3.50}$$

die Wachstums- und Lipschitzbedingungen 3.10 auf  $\mathcal{S}_\varepsilon$ .

### 3.3.2 Die regularisierte Dynamic Programming Equation

An dieser Stelle fügen wir Gleichung (3.49) den regularisierenden Term  $\frac{1}{\sqrt{m}}d\tilde{B}_t$  hinzu. Dieser Term stellt einen Wiener Prozess dar, dessen Trajektorien bekanntlich nicht auf die Wertemenge  $\mathcal{S}$  beschränkt bleiben muss, stattdessen auch Werte im gesamten  $\mathbb{R}^{d-1}$  annehmen kann. Demgemäß bedarf es Koeffizientenfunktionen  $\underline{\alpha}$ ,  $\underline{\beta}$  und  $\underline{\gamma}$  von Gleichung (3.49), die ebenfalls auf dem gesamten  $\mathbb{R}^{d-1}$  definiert sind. Dabei sind wir in der konkreten Verallgemeinerung insofern frei, dass wir lediglich darauf achten müssen, dass die Wachstums- und Lipschitzbedingungen aus Annahme 3.10 nicht verletzt werden, um die eindeutige Lösbarkeit der Zustandsgleichung nicht zu gefährden. Der Einfachheit halber setzen wir die Koeffizientenfunktionen stetig auf den ganzen  $\mathbb{R}^{d-1}$  für  $h \in \mathcal{H}$  in folgender Weise fort:

$$\tilde{\alpha} := \begin{cases} \underline{\alpha}(\pi, h)(1 - \text{dist}(\pi, \mathcal{S})/\varepsilon) & : \pi \in \mathcal{S}_\varepsilon \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (3.51)$$

mit  $\underline{\alpha}$  aus Gleichung (3.49). In analoger Weise definieren wir die auf ganz  $\mathbb{R}^{d-1}$  fortgesetzten Koeffizientenfunktionen  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\gamma}$  und erhalten insgesamt die regularisierte Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} d {}^m\Pi_t &= \tilde{\alpha}({}^m\Pi_t, h_t)dt + \tilde{\beta}^\top({}^m\Pi_t)dW_t + \int_{\mathcal{U}} \tilde{\gamma}({}^m\Pi_{t-}, u)\tilde{N}(dt \times du) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{m}}d\tilde{B}_t. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nun möchten wir das Nutzenmaximierungsproblem (2.14) für die regularisierte Zustandsgleichung lösen und übernehmen die Terminologie von (3.30), (3.31) und (3.39) mit  ${}^m\Pi_t$  als Lösung der regularisierten Zustandsgleichung (3.52). Da nun  ${}^m\Pi_t$  ebenfalls auf ganz  $\mathbb{R}^{d-1}$  Werte annehmen kann, setzen wir auch die Funktion  $\tilde{b} = \tilde{b}(\pi, h)$  aus (3.25) auf den ganzen  $\mathbb{R}^{d-1}$  fort: Mit  $b_\star = \min\{\tilde{b}(\pi, h) : \pi \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{K}\}$  und  $b^\star = \max\{\tilde{b}(\pi, h) : \pi \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{K}\}$  definieren wir die auf  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathcal{K}$  beschränkte Funktion

$$\tilde{b}(\pi, h) := (\tilde{b}(\pi, h) \vee b_\star) \wedge b^\star. \quad (3.53)$$

Weiterhin setzen wir

$$v^m(t, \pi, h) := E\left(\exp\left\{\int_t^T -\tilde{b}({}^m\Pi_s^{(t, \pi, h)}, h_s)ds\right\}\right), \quad h \in \mathcal{H}, \quad (3.54)$$

$$V^m(t, \pi) := \sup\{v^m(t, \pi, h) : h \in \mathcal{H}\} \quad (3.55)$$

und unterscheiden im Folgenden zwischen zwei Problemstellungen:

- (i) Das Tripel  $(UnRegP) := \{(3.28), (3.30), (3.31)\}$  bezeichnen wir als unregularisiertes Problem, wohingegen wir unter
- (ii) dem Tripel  $(RegP) := \{(3.52), (3.54), (3.55)\}$  die Bezeichnung regularisiertes Problem beimesen.

In Analogie zu (3.30) und (3.31) benennen wir (3.54) und (3.55) als Zielfunktion bzw. Wertfunktion des regularisierten Problems (RegP). Mit dem Generator

$$\begin{aligned} {}^m\mathcal{L}^r g(\pi) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{d-1} \tilde{\beta}_i^\top(\pi) \tilde{\beta}_j(\pi) \partial_{\pi_i \pi_j}^2 g(\pi) + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{d-1} \partial_{\pi_i \pi_i}^2 g(\pi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d-1} \tilde{\alpha}_i(\pi, r) \partial_{\pi_i} g(\pi) + \int_{\mathcal{U}} \{g(\pi + \tilde{\gamma}(\pi, u)) - g(\pi)\} \nu(du) \end{aligned} \quad (3.56)$$

der regularisierten Zustandsgleichung (3.52), ist die dem regularisierten Problems (RegP) zugehörige Dynamic Programming Equation für  $V^m(t, \pi) \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^{d-1})$

$$\begin{aligned} \partial_t V^m(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{ {}^m\mathcal{L}^r V^m(t, \pi) - \tilde{b}(\pi, r) V^m(t, \pi) \} &= 0 \\ V^m(T, \pi) &= 1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

nach [13] eindeutig lösbar, weil in diesem Fall

$$z^\top \left( \tilde{\beta}^\top \tilde{\beta} + \frac{1}{2m} I_{d-1} \right) z = z^\top \tilde{\beta}^\top \tilde{\beta} z + \frac{1}{2m} z^\top z \geq \frac{1}{2m} |z|^2$$

die gleichmäßige Elliptizität der Gleichung sichert. Als Hauptresultat dieses Paragraphen seien nun die aus Paragraph 7 des Papers [18] zitierten Sätze angefügt.

**Satz 3.12.** *Sei  $v^m(t, \pi, h)$  die Zielfunktion des regularisierten Problems (RegP) und  $v(t, \pi, h)$  Zielfunktion des unregularisierten Problems (UnRegP), dann gilt:*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} |v^m(t, \pi, h) - v(t, \pi, h)| \longrightarrow 0 \text{ für } t \in [0, T], \pi \in \mathcal{S}.$$

Mit diesem Satz beweist man die punktweise Konvergenz der Wertfunktionen und erhalten

**Satz 3.13.** *Sei  $V^m(t, \pi)$  die Wertfunktion des regularisierten Problems (RegP) und  $V(t, \pi)$  Wertfunktion des unregulierten Problems (UnRegP), dann ist*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V^m(t, \pi) = V(t, \pi), \text{ für alle } (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}.$$

Schließlich zitieren wir das Hauptresultat,

**Satz 3.14. ( $\varepsilon$ -Optimalität)**

*Sei  $V(t, \pi)$  die Wertfunktion des unregularisierten Problems (UnRegP),  $v(t, \pi, h)$  Zielfunktion des unregularisierten Problems (UnRegP) und  ${}^m h^*(t, \pi)$  ein Kandidat für die optimale Strategie des regularisierten Problems (RegP), dann finden wir zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $m_0 \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:*

$$|V(t, \pi) - v(t, \pi, {}^m h^*)| \leq \varepsilon, \quad m \geq m_0. \quad (3.58)$$

*Wir nennen in diesem Fall die Strategie  ${}^m h^*$   $\varepsilon$ -optimal.*

---

## 4 Lösung des Nutzenmaximierungsproblems

In diesem Kapitel möchten wir eine Auswahl an verschiedenen numerischen Verfahren zur Behandlung des unregularisierten Problems (*UnRegP*) sowie des regularisierten Problems (*RegP*) anhand des im folgenden Paragraphen aufgeführten Modellfalls  $n = 1$  und  $d = 2$  vorstellen. Dabei wenden wir uns im zweiten Paragraphen dieses Kapitels unter Verwendung finiter Differenzen zunächst der numerischen Lösung der DPE des unregularisierten Problems (*UnRegP*) zu und geben mit Ideen aus dem Buch von Ames [1] einen Konvergenzbeweis für das explizite Differenzenverfahren an. Der dritte Paragraph bietet mit dem Policy Improvement eine weitere Möglichkeit zur numerischen Lösung des Problems (*UnRegP*), wobei einmal zwischen der Finite Differenzen Methode und der Monte Carlo Methode unterschieden wird. Schließlich werden wir im vierten Paragraphen für das regularisierte Problem (*RegP*) die DPE numerisch unter Verwendung finiter Differenzen lösen.

### 4.1 Modellfall für das unregularisierte Problem

Als Modellfall dient uns das Finanzmarktmodell aus Paragraph 2.1 mit einem ( $n = 1$ ) Aktienprozess, dessen Drift  $\mu_t$  von einer Markovkette  $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$  mit  $d = 2$  Zuständen getrieben wird. Dies bedeutet, die Drift  $\mu_t$  nimmt in Abhängigkeit von  $Y_t$  einen der beiden Werte  $\mu_1$  oder  $\mu_2$  an, o.B.d.A. sei  $\mu_1 > \mu_2$ . Es bezeichne

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 \\ q_2 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad q_1, q_2 > 0, \quad (4.1)$$

den Generator der Markovkette. Mit  $\sigma_R := \sigma_{11}$  aus (2.1) bezeichnen wir im Folgenden die Volatilität des Aktienprozesses. Unserem Modell gemäß haben wir zur Lösung des Nutzenmaximierungsproblems (2.14) mit dem Nutzenparameter  $\theta$  neben den Renditen  $R$  noch einen an diskreten Zeitpunkten  $T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  auftreten Experten zur Verfügung, welcher an diesen Zeitpunkten Aussagen  $Z_k$  mit bedingten Erwartungen  $E[Z_k | Y_{T_k}] = \mu(Y_{T_k})$  und  $\text{Var}(Z_k) = \varrho_i^2$  für  $i = 1, 2$  über den momentanen Zustand der Drift trifft. Die Zeitpunkte  $T_k$  sind Sprungzeitpunkte eines Poissonprozesses mit Parameter  $\lambda$ . Die in (3.7) auftretenden bedingten Dichten wählen wir als gestutzte Normalverteilungen. Dies mahnt zur Vorsicht im Umgang mit den Parametern  $(\mu_i, \varrho_i^2)$ , weil das Abschneiden normalverteilter Zufallsgrößen im Allgemeinen eine Korrektur im Erwartungswert und der Varianz zur Folge hat. Zu diesem Zweck zitieren wir zunächst einige Eigenschaften der gestutzten Normalverteilung. Schneidet man eine normalverteilte Zufallsgröße  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \varrho^2)$  auf dem Intervall  $(l, u)$  für beliebige  $-\infty \leq l < u \leq \infty$  ab, dann bezeichnen wir mit  $X_{(l, u)} := (X \mid l < X < u)$  die Zufallsgröße  $X$  eingeschränkt auf das Intervall  $(l, u)$ , deren Verteilung gestutzte Normalverteilung genannt wird.

**Hilfssatz 4.1.** *Gegeben sei die Zufallsgrößen  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \varrho^2)$  und die Zufallsgröße  $X_{l, u}$  mit einer auf das Intervall  $(l, u) \subset \mathbb{R}$  gestutzten Normalverteilung. Für den Erwartungswert*

und die Varianz der Zufallsgröße  $X_{l,u}$  ist mit  $\bar{l} := \frac{l-\mu}{\varrho}$  und  $\bar{u} := \frac{u-\mu}{\varrho}$  Folgendes richtig:

$$\begin{aligned}\Upsilon^E(l, u, \mu, \varrho) &:= E(X_{l,u}) = \mu + \frac{\varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} \cdot \varrho \\ \Upsilon^V(l, u, \mu, \varrho) &:= \text{Var}(X_{l,u}) = \varrho^2 \left[ 1 + \frac{\bar{l}\varphi(\bar{l}) - \bar{u}\varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} - \left( \frac{\varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} \right)^2 \right],\end{aligned}$$

wobei  $\varphi$  und  $\Phi$  Dichte und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind.

*Beweis:* Den Beweis des Hilfssatzes entnehmen wir dem Buch [22] von Jürgen Groß.

**Bemerkung 4.2.**

- 1) Schneidet man eine normalverteilte Zufallsgröße  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \varrho^2)$  auf dem Intervall  $(l, u)$  ab, so werden im Allgemeinen gemäß Hilfssatz 4.1 der Erwartungswert und die Varianz von  $X_{l,u}$  nicht mehr mit denen von  $X$  übereinstimmen.
- 2) Im Falle unseres Experten, welcher wie oben beschrieben an diskreten Zeitpunkten  $T_k$  abgeschnitten normalverteilte Signale  $Z_k$  sendet, bedeutet dies Folgendes: Möchte man die Eigenschaft  $E(Z_k) = \mu(Y_{T_k})$  und  $\text{Var}(Z_k) = \varrho_i^2$ ,  $i = 1, 2$  gewährleisten, muß man Parametersätze  $(\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2)$ ,  $i = 1, 2$  durch Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\Upsilon^E(l, u, \tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i) &= \mu_i \\ \Upsilon^V(l, u, \tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i) &= \varrho_i^2.\end{aligned}$$

bestimmen.

Zur Konstruktion gestutzter Normalverteilungen schränken wir die Normalverteilungsdichten

$$\tilde{f}_i(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\varrho}_i} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\varrho}_i^2}(z - \tilde{\mu}_i)^2\right) \quad (4.2)$$

mit  $M_0 := \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  auf die kompakte Menge  $\mathcal{Z}$  aus (2.9) gemäß

$$\mathcal{Z} = [l, u] \quad \text{mit } l = \min_{i=1,2} \{M_0 - \kappa\tilde{\varrho}_i\} \quad \text{und } u = \max_{i=1,2} \{M_0 + \kappa\tilde{\varrho}_i\}, \quad (4.3)$$

ein. Hierbei ist  $\kappa \in \mathbb{R}_+$ . Wegen

$$F_{\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\varrho}_i} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(z - \tilde{\mu}_i)^2}{2\tilde{\varrho}_i^2}\right) dz,$$

der Substitution  $t := \frac{z - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\varrho}_i}$  und  $\Phi := F_{0,1}$  ist bekanntlich

$$F_{\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2}(x) = \Phi\left(\frac{x - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\varrho}_i}\right)$$

und schließlich erhalten wir mit den Normierungsfaktoren

$$c_i := \int_l^u \tilde{f}_i(z) dz = \left( F_{\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2}(u) - F_{\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2}(l) \right) = \Phi \left( \frac{u - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\varrho}_i} \right) - \Phi \left( \frac{l - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\varrho}_i} \right), \quad i = 1, 2 \quad (4.4)$$

die gestutzten Normalverteilungsdichten

$$f_i: \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \quad (4.5)$$

mit  $i = 1, 2$  und  $f_i(z) := \frac{\tilde{f}_i(z)}{c_i}$ . Diese Dichten werden wir im Folgenden im Sinne der bedingten Dichten in (3.7) verwenden. Schließlich lösen wir das Nutzenmaximierungsproblem (2.14) unter Verwendung von Satz 3.8. Für die  $(d-1)$ -dimensionale Zustandsgleichung (3.28) in den Zustandsvariablen  $\Pi_1, \dots, \Pi_{d-1}$  erhalten wir im Fall  $d = 2$  mit der ab jetzt gültigen Konvention  $\Pi := \Pi_1$ :

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(h)} &= (\alpha(\Pi_t^{(h)}) + \beta(\Pi_t^{(h)})\theta\sigma_R h_t)dt + \beta(\Pi_t^{(h)})dW_t + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_t^{(h)}, z)\tilde{I}(dt \times dz) \quad (4.6) \\ \Pi_0^{(h)} &= \check{p}_0 \end{aligned}$$

mit  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  aus (3.13)-(3.15), d.h.

$$\alpha(\pi) = q_2 - \pi(q_1 + q_2) \quad (4.7)$$

$$\beta(\pi) = \pi(1 - \pi)\sigma_R^{-1}(\mu_1 - \mu_2) \quad (4.8)$$

$$\gamma(\pi, z) = \pi \left( \frac{f_1(z)}{\bar{f}(z, \pi)} - 1 \right) \text{ mit } \bar{f}(z, \pi) = \pi f_1(z) + (1 - \pi)f_2(z). \quad (4.9)$$

Weiterhin besitzt für alle  $g \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$  der Generator des obigen Sprungprozesses gemäß (3.38) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(r)}g(\pi) &= \frac{1}{2}\beta^2(\pi)\partial_\pi^2 g(\pi) + (\alpha(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R r)\partial_\pi g(\pi) \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{g(\pi + \gamma(\pi, z)) - g(\pi)\}\bar{f}(\pi, z)dz. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit  $\mathcal{S} = [0, 1]$  sowie

$$\hat{\mu}(\pi) = \mu_1\pi + \mu_2(1 - \pi) \quad (4.11)$$

und gemäß (3.25)

$$\tilde{b}(\pi, r) = -\theta\hat{\mu}(\pi)r + \frac{\theta(1 - \theta)}{2}\sigma_R^2 r^2 \quad (4.12)$$

sowie

$$v(t, \pi, h) = E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \pi, h)}, h_s) ds \right\} \right) \quad \forall (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}, \quad h \in \mathcal{H} \quad (4.13)$$

$$V(t, \pi) := v(t, \pi, h^*) = \begin{cases} \sup_{h \in \mathcal{H}} \{v(t, \pi, h)\}, & (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}, \quad \theta > 0 \\ \inf_{h \in \mathcal{H}} \{v(t, \pi, h)\}, & (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}, \quad \theta < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

schreibt sich für den Modellfall  $n = 1$  und  $d = 2$  das unregularisierte Problem in der Form in Abhängigkeit von  $\theta$

$$(UnRegP) = \{(4.6), (4.13), (4.14)\}.$$

Für die Lösung

$$h^*(t, \pi) = r^*(t, \pi) = \frac{1}{(1 - \theta)\sigma_R^2} \left( \hat{\mu}(\pi) + \sigma_R \beta(\pi) \frac{\partial_\pi V(t, \pi)}{V(t, \pi)} \right) \quad (4.15)$$

des Nutzenmaximierungsproblems (2.14) bedarf es einer (numerischen) Lösung der gemäß Satz 3.6 aus Kapitel 3 Paragraph 3.2 dem Steuerungsproblem ( $UnRegP$ ) zugeordneten PIDE

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t V(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{ \mathcal{L}^{(r)} V(t, \pi) - \tilde{b}(\pi, r) V(t, \pi) \} \\ 1 &= V(T, \pi). \end{aligned} \quad (4.16)$$

für hinreichend großes  $\mathcal{K}$  im Sinne von Punkt 2 aus Bemerkung 3.7. Mit

$$V(t, \pi) = \tilde{G}^{1-\theta}(t, \pi) \quad (4.17)$$

und anschließender Transformation auf Restlaufzeit  $\tau := T - t$  gemäß  $G(\tau, \pi) = \tilde{G}(T - t, \pi)$  genügt nach Satz 3.8 desselben Paragraphen die Betrachtung der DPE

$$\begin{aligned} \partial_\tau G(\tau, \pi) &= a(\pi) \partial_\pi^2 G(\tau, \pi) + b(\pi) \partial_\pi G(\tau, \pi) + c(\pi) G(\tau, \pi) \\ &+ \frac{\lambda}{1 - \theta} G^\theta(\tau, \pi) \int_l^u (G^{1-\theta}(\tau, \pi + \gamma(\pi, z)) - G^{1-\theta}(\tau, \pi)) \bar{f}(\pi, z) dz \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit Anfangsbedingung  $G(0, \pi) = 1$  und Koeffizientenfunktionen

$$a(\pi) = \frac{1}{2} \beta^2(\pi) \quad (4.19)$$

$$b(\pi) = \alpha(\pi) + \frac{\theta}{1 - \theta} \sigma_R \beta(\pi) \hat{\mu}(\pi) \quad (4.20)$$

$$c(\pi) = \frac{\theta}{2(1 - \theta)\sigma_R^2} \hat{\mu}^2(\pi). \quad (4.21)$$

## 4.2 Finite Differenzen

Ziel dieses Paragraphen ist es ein explizites und ein semi-implizites Differenzenverfahren für die partielle Integrodifferentialgleichung (PIDE)

$$\begin{aligned} G &\in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times (0, 1)) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times [0, 1]) \\ \partial_\tau G(\tau, \pi) &= \mathcal{L}(G)|_{(\tau, \pi)} + \frac{\lambda}{1 - \theta} G^\theta(\tau, \pi) K[G]|_{(\tau, \pi)} \\ G(0, \pi) &= 1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit

$$\mathcal{L} := a(\pi)\partial_\pi^2 + b(\pi)\partial_\pi + c(\pi)$$

und dem Integraloperator

$$K[G]|_{(\tau,\pi)} := \int_l^u (G^{1-\theta}(\tau, \pi + \gamma(z, \pi)) - G^{1-\theta}(\tau, \pi)) \bar{f}(\pi, z) dz$$

anzugeben. Hierfür wird es nötig sein, sowohl den differentiellen Anteil als auch den Integralanteil der PIDE zu diskretisieren. Wir verwenden zu diesen Zweck die Methode der Finiten Differenzen als auch Quadraturformeln für den Integralteil der Gleichung. Dabei werden wir, wie in der Numerik der Partiellen Differentialgleichungen üblich, die Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzen. Für den konvektiven Teil der Gleichung nutzen wir die Upwind-Methode bei der die Ableitung  $\partial_\pi G(\tau, \pi)$  in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Koeffizientenfunktion  $b$  einmal durch Vorwärtsdifferenzen oder Rückwärtsdifferenzen diskretisiert wird. Anschließend werden wir noch einen Konvergenzbeweis für das explizite Differenzenverfahren angeben.

**Bemerkung 4.3.** Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten für beliebige Koeffizientenfunktionen  $a, b, c$  der Funktionenklasse  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

### 4.2.1 Vorbetrachtungen

Die Diskretisierung obiger PIDE soll auf dem Gitter

$$Q_{\delta_\tau, \delta_\pi} := \left\{ (\tau_m, \pi_j) : \begin{array}{ll} \tau_m = m\delta_\tau, & \delta_\tau = \frac{T}{n_\tau}, \quad m = 0, \dots, n_\tau \\ \pi_j = j\delta_\pi, & \delta_\pi = \frac{1}{n_\pi}, \quad j = 0, \dots, n_\pi \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

erfolgen. Mit

$$G = G(\tau, \pi) : [0, T] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnen wir die exakte Lösung der PIDE und mit

$$\{G_j^m\}_{m,j} : Q_{\delta_\tau, \delta_\pi} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\tau_m, \pi_j) \longrightarrow G_j^m$$

die numerische Lösung des diskretisierten Problems. Dabei ist  $G_j^m$  als Näherung der exakten Lösung  $G$  im Gitterpunkt  $(\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  zu verstehen. Wir vereinbaren an dieser Stelle die Bezeichnungen  $G_j^{m,\theta} := (G_j^m)^\theta$  und  $G^m := (G_0^m, \dots, G_{n_\pi}^m)^\top$ . Die Funktion

$$e_j^m := G(\tau_m, \pi_j) - G_j^m : Q_{\delta_\tau, \delta_\pi} \rightarrow \mathbb{R}$$

nennen wir Fehlerfunktion. Später werden Abschätzungen der Maximumnorm

$$\|e^m\| := \max\{|e_j^m| : j \in \{0, \dots, n_\pi\}\} \quad (4.24)$$



erbracht, um einen Konvergenzbeweis für das explizite Differenzenverfahren zu gewinnen. Zunächst gewinnen wir aus der Taylor'schen Formel aus Satz 1 §2 Kap.2 im Lehrbuch von Sauvigny [52] unter der Bedingung  $G \in \mathcal{C}^{2,4}$

$$G(\tau + \delta_\tau, \pi) = G(\tau, \pi) + \partial_\tau G(\tau, \pi) \delta_\tau + \frac{1}{2} \partial_\tau^2 G(\hat{\tau}, \pi) \delta_\tau^2 \quad (4.25)$$

$$G(\tau, \pi \pm \delta_\pi) = G(\tau, \pi) \pm \partial_\pi G(\tau, \pi) \delta_\pi + \frac{1}{2} \partial_\pi^2 G(\tau, \pi) \delta_\pi^2 \pm \frac{1}{3!} \partial_\pi^3 G(\tau, \pi) \delta_\pi^3 \\ + \frac{1}{4!} \partial_\pi^4 G(\tau, \xi_\pm) \delta_\pi^4 \quad (4.26)$$

den Ausgangspunkt für die Diskretisierung der Ableitungen. Dabei ist  $\hat{\tau} \in (\tau, \tau + \delta_\tau)$ ,  $\xi_+ \in (\pi, \pi + \delta_\pi)$  und  $\xi_- \in (\pi - \delta_\pi, \pi)$ . Brechen wir die Taylorentwicklung in  $\pi$  beim Restglied zweiter Ordnung ab, so entstehen die Zwischenstellen  $\hat{\pi}_- \in (\pi - \delta_\pi, \pi)$  und  $\hat{\pi}_+ \in (\pi, \pi + \delta_\pi)$ . Umstellen bzw. Addition von (4.25)-(4.26) liefern Darstellungen aller in der PIDE vorkommenden Ableitungen und damit eine Rechtfertigung für die Diskretisierung der Ableitungen in Termen der Gitterfunktion  $G_j^m$ :

1) Die Zeitableitung

$$\partial_\tau G(\tau_m, \pi_j) = \frac{G(\tau_{m+1} + \delta_\tau, \pi_j) - G(\tau_m, \pi_j)}{\delta_\tau} - \frac{1}{2} \partial_\tau^2 G(\hat{\tau}, \pi_j) \delta_\tau$$

ersetzen wir durch die Vorwärtsdifferenz

$$\frac{G_j^{m+1} - G_j^m}{\delta_\tau}. \quad (4.27)$$

2) Für den Konvektionsteil verwenden wir Upwinding, so dass wir für  $b(\tau_m, \pi_j) > 0$

$$\partial_\pi G(\tau_m, \pi_j) = \frac{G(\tau_m, \pi_j + \delta_\pi) - G(\tau_m, \pi_j)}{\delta_\pi} - \frac{1}{2} \partial_\pi^2 G(\tau_m, \hat{\pi}_+) \delta_\pi$$

durch die Vorwärtsdifferenz

$$\frac{G_{j+1}^m - G_j^m}{\delta_\pi} \quad (4.28)$$

ersetzen. Dagegen ersetzen wir im Fall  $b(\tau_m, \pi_j) < 0$

$$\partial_\pi G(\tau_m, \pi_j) = \frac{G(\tau_m, \pi_j) - G(\tau_m, \pi_j - \delta_\pi)}{\delta_\pi} + \frac{1}{2} \partial_\pi^2 G(\tau_m, \hat{\pi}_-) \delta_\pi$$

durch die Rückwärtsdifferenz

$$\frac{G_j^m - G_{j-1}^m}{\delta_\pi}. \quad (4.29)$$

3) Die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_\pi^2 G(\tau_m, \pi_j) &= \frac{G(\tau_m, \pi_j - \delta_\pi) - 2G(\tau_m, \pi_j) + G(\tau_m, \pi_j + \delta_\pi)}{\delta_\pi^2} \\ &\quad - \frac{1}{4!} \delta_\pi^2 (\partial_\pi^4 G(\tau_m, \xi_+) + \partial_\pi^4 G(\tau_m, \xi_-)) \end{aligned}$$

ersetzen wir durch

$$\frac{G_{j-1}^m - 2G_j^m + G_{j+1}^m}{\delta_\pi^2}. \quad (4.30)$$

#### 4.2.2 Semi-implizites Differenzenverfahren für die PIDE

An dieser Stelle werden wir ein semi-implizites Differenzenverfahren einführen. Dabei wird der elliptische Teil  $\mathcal{L}$  der PIDE  $\Theta$ -gewichtet und der Integralteil  $K$  explizit diskretisiert. Der Integralteil wird explizit diskretisiert, weil ein voll implizites Verfahren auf die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems führt, welches neben erhöhten numerischen Aufwandes auch noch Fragen an Existenz und Eindeutigkeit der Lösung stellt. Wir vereinbaren  $a_j := a(\pi_j)$ ,  $b_j := b(\pi_j)$  mit  $b_j^+ := \max\{b_j, 0\}$  und  $b_j^- := \max\{-b_j, 0\}$  sowie  $c_j := c(\pi_j)$  für alle  $j \in \{0, \dots, n_\pi\}$ . Weiterhin definieren wir den aus Newton-Cotes Formeln resultierenden und nur Gitterpunkte  $(\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  verwendenden diskretisierten Integraloperator zunächst formal als

$$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,j} := \begin{cases} K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} - \frac{\lambda}{1-\theta} G_j^m & : j \in \{1, \dots, n_\pi - 1\} \\ 0 & : j \in \{0, n_\pi\} \end{cases}$$

mit

$$K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} = \frac{\lambda \delta_z}{1-\theta} \sum_{l=0}^{n_\pi} d(j, l) G_l^{m, 1-\theta} G_j^{m, \theta}$$

sowie den diskretisierten Differentialoperator

$$\mathcal{L}_{\delta_\pi}^{m,j} := a_j \frac{G_{j-1}^m - 2G_j^m + G_{j+1}^m}{\delta_\pi^2} + b_j^+ \frac{G_{j+1}^m - G_j^m}{\delta_\pi} - b_j^- \frac{G_j^m - G_{j-1}^m}{\delta_\pi} + c_j G_j^m.$$

Dabei verweisen wir für die Bedeutung von  $D := \{d(i, j)\}_{i,j=0,\dots,n_\pi}$  auf den folgenden Paragraphen. Nun gewinnen wir für  $0 \leq \Theta \leq 1$  ein ganzes Kontinuum an  $\Theta$ -gewichteten semi-impliziten Differenzenverfahren:

$$\frac{G_j^{m+1} - G_j^m}{\delta_\tau} = \Theta \mathcal{L}_{\delta_\pi}^{m+1,j} + (1-\Theta) \mathcal{L}_{\delta_\pi}^{m,j} + K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,j}. \quad (4.31)$$

Interessant sind für uns die Fälle  $\Theta = 0$  und  $\Theta = \frac{1}{2}$ . Im Fall  $\Theta = 0$  erhalten wir ein explizites Differenzenverfahren. Hierfür wird im letzten Paragraphen dieses Kapitels noch

ein Konvergenzbeweis entwickelt. Im Fall  $\Theta = \frac{1}{2}$  erhalten wir ein Crank-Nicolson Verfahren. Aus (4.31) erhalten wir unmittelbar

$$G_j^{m+1} - \delta_\tau \Theta \mathcal{L}_{\delta_\pi}^{m+1,j} = G_j^m + \delta_\tau (1 - \Theta) \mathcal{L}_{\delta_\pi}^{m,j} + \delta_\tau K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,j}$$

bzw.

$$\Xi_1^{j,-} G_{j-1}^{m+1} + \Xi_2^j G_j^{m+1} + \Xi_1^{j,+} G_{j+1}^{m+1} = \Psi_1^{j,-} G_{j-1}^m + \Psi_2^j G_j^m + \Psi_1^{j,+} G_{j+1}^m + \delta_\tau K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,j}$$

mit

$$\Xi_1^{j,\pm} := -\delta_\tau \Theta \left( \frac{a_j}{\delta_\pi^2} + \frac{b_j^\pm}{\delta_\pi} \right), \quad \Xi_2^j := 1 + \delta_\tau \Theta \left( \frac{2a_j}{\delta_\pi^2} + \frac{|b_j|}{\delta_\pi} - c_j \right) \quad (4.32)$$

$$\Psi_1^{j,\pm} := \delta_\tau (1 - \Theta) \left( \frac{a_j}{\delta_\pi^2} + \frac{b_j^\pm}{\delta_\pi} \right), \quad \Psi_2^j := 1 - \delta_\tau (1 - \Theta) \left( \frac{2a_j}{\delta_\pi^2} + \frac{|b_j|}{\delta_\pi} - c_j \right). \quad (4.33)$$

Mit diesen Überlegungen überführen wir das parabolische Anfangswertproblem PIDE auf dem Gitter  $Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  in eine Folge von Gleichungssystemen

$$\Xi \cdot G^{m+1} = \Psi \cdot G^m + \delta_\tau K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^m, \quad m = 0, 1, \dots, n_\tau - 1 \quad (4.34)$$

mit

$$\Xi := \begin{pmatrix} \Xi_2^0 & \Xi_1^{0,+} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Xi_1^{1,-} & \Xi_2^1 & \Xi_1^{1,+} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \Xi_1^{n_\pi-1,-} & \Xi_2^{n_\pi-1} & \Xi_1^{n_\pi-1,+} \\ 0 & \dots & & 0 & \Xi_1^{n_\pi,-} & \Xi_2^{n_\pi} \end{pmatrix}$$

und

$$\Psi := \begin{pmatrix} \Psi_2^0 & \Psi_1^{0,+} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_1^{1,-} & \Psi_2^1 & \Psi_1^{1,+} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_1^{n_\pi-1,-} & \Psi_2^{n_\pi-1} & \Psi_1^{n_\pi-1,+} \\ 0 & \dots & & 0 & \Psi_1^{n_\pi,-} & \Psi_2^{n_\pi} \end{pmatrix}$$

sowie

$$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^m := (K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,0}, \dots, K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,n_\pi})^\top.$$

Somit wird ausgehend von  $G^0 = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{n_\pi+1}$  für alle  $m \in \{1, \dots, n_\tau - 1\}$  gemäß (4.34) der Vektor  $G^{m+1}$  rekursiv aus  $G^m$  berechnet bis schließlich die Werte  $G_j^m$  für alle  $(\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  vorliegen und wir somit eine numerische Näherungslösung der PIDE zum Gitter  $Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  berechnet haben. Im Fall des expliziten Verfahrens ( $\Theta = 0$ ) gilt  $\Xi = I$ , wobei  $I \in \mathbb{R}^{(n_\pi+1) \times (n_\pi+1)}$  die Einheitsmatrix ist.

### 4.2.3 Diskretisierung des Integraloperators

Der Integralteil von PIDE (4.22) schreibt sich zu gegebenem  $(\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  mit 4.23

$$K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} := \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \int_l^u G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z)) \bar{f}(\pi_j, z) dz \quad (4.35)$$

und den Dichtefunktionen  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2$  sowie

$$\bar{f}(\pi, z) := \pi f_1(z) + (1 - \pi) f_2(z)$$

gemäß

$$\frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) K[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} = K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} - \frac{\lambda}{1-\theta} G(\tau_m, \pi_j), \quad \text{für alle } (\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}.$$

Weiterhin bezeichnen wir mit  $K^N$  die Diskretisierung des Integraloperators  $K^E$  und mit

$$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,j} := K^N - \frac{\lambda}{1-\theta} G_j^m$$

die Diskretisierung des Integraloperators  $\frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta K[G]$ . Nun möchten wir den Integraloperator  $K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)}$  diskretisieren. Hierbei erscheinen  $(\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  als Parameter des Integrals. Hierzu werden wir zunächst die summierten Newton-Cotes Formeln am Beispiel der summierten Trapezregel und der summierten Simpsonregel zur Diskretisierung des Integrals verwenden und anschließend durch lineare Interpolation die auftretenden Terme

$$G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k))$$

behandeln. Zu diesem Zweck fassen wir die Aussagen auf Seite 309/310 aus [54] zusammen gemäß

**Hilfssatz 4.4.** *Sei  $f \in \mathcal{C}^s([a, b], \mathbb{R})$  mit  $s \in \{2, 4\}$ . Weiterhin unterteilen wir das Intervall  $[a, b]$  mit  $\delta_x := \frac{b-a}{N}$  und  $x_l = a + l\delta_x$  für  $l = 0, \dots, N$  gemäß  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ . Dann gibt es*

$$\mathcal{R}_{Q_F}^2 := \frac{|b-a|}{12} \max_{x \in [a,b]} \{|f^{(2)}(x)|\} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{Q_F}^4 := \frac{|b-a|}{180} \max_{x \in [a,b]} \{|f^{(4)}(x)|\},$$

so dass

$$\int_a^b f(x) dx - I_N(f) = \mathcal{R}_{Q_F}^s \delta_x^s$$

und  $I_N(f) := \delta_x \sum_{l=0}^N \chi_l^s f(x_l)$  mit

$$\chi_l^2 := \begin{cases} \frac{1}{2} & : l \in \{0, N\} \\ 1 & : l \in \{1, \dots, N-1\} \end{cases} \quad \text{und} \quad \chi_l^4 := \begin{cases} \frac{1}{3} & : l \in \{0, N\} \\ \frac{4}{3} & : \{l \in \{1, \dots, N-1\} : l \text{ ungerade}\} \\ \frac{2}{3} & : \{l \in \{1, \dots, N-1\} : l \text{ gerade}\} \end{cases}.$$

und

**Bemerkung 4.5.** Die summierte Simpsonformel ist nur für gerades  $N$  anwendbar. Dieses wollen wir im folgenden stets voraussetzen.

Nun beschäftigen wir uns wie oben angekündigt mit der Interpolation der in obigen Quadraturformeln auftretenden Terme  $G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k))$ . Zu diesem Zweck zitieren wir Satz 3.2 aus dem Buch von Schwarz und Köckler [54]

**Hilfssatz 4.6.** *Es seien  $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a, b])$ ,  $x_i \in [a, b]$  und  $y_i := f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Für jedes  $x \in [a, b]$  genügt dann das Interpolationspolynom  $p = p(x)$  von  $f = f(x)$  der Gleichung*

$$f(x) = p(x) + \mathcal{R}_{IP}, \quad \mathcal{R}_{IP} = \frac{\omega(x)f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

mit  $\omega(x) := (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  und einem  $\xi_x \in (a, b)$ .

Anwendung von Hilfssatz 4.4 liefert mit  $\delta_z := \frac{u-l}{n_z}$  und

$$f(\tau_m, \pi_j, z) := G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z))\bar{f}(\pi_j, z)$$

vermöge der Zerlegung  $z_k = l + k\delta_z$  für  $k = 0, \dots, n_z$  für feste  $(\tau_m, \pi_j)$  und  $s \in \{2, 4\}$

$$\begin{aligned} \int_l^u G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z))\bar{f}(\pi_j, z) dz &= \int_l^u f(\tau_m, \pi_j, z) dz \\ &= I_{n_z}(\tau_m, \pi_j, z_k) - \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s \\ &= \delta_z \left( \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k^s f(\tau_m, \pi_j, z_k) \right) - \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s \end{aligned}$$

mit  $s = 2$  für den Fall der summierten Trapezregel und  $s = 4$  im Fall der summierten Simpsonregel.

**Bemerkung 4.7.** Damit gilt für jeden festen Punkt  $(\tau_m, \pi_j) \in \mathcal{Q}_{\delta_\tau, \delta_\pi}$

$$\lim_{n_z \rightarrow \infty} I_{n_z}(\tau_m, \pi_j) = \int_l^u (G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z))\bar{f}(\pi_j, z) dz.$$

Nun entstehen in obiger Quadraturformel jeweils Terme der Gestalt

$$f(\tau_m, \pi, z_k) = G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k))\bar{f}(\pi, z).$$

Problematisch darin ist, dass im Allgemeinen  $\pi_{j,k} := \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k) \in [\pi_l, \pi_{l+1})$  für ein  $l \in \{0, \dots, n_\pi - 1\}$  gilt, d.h.  $\pi_{j,k}$  wird im Allgemeinen kein Diskretisierungspunkt  $\pi_0, \dots, \pi_{n_\pi}$  der Zerlegung von  $\mathcal{S} = [0, 1]$  sein, sondern zwischen zwei Diskretisierungspunkten  $\pi_l$  und  $\pi_{l+1}$  für genau ein  $l \in \{0, \dots, n_\pi - 1\}$  liegen. Aus diesem Grund werden wir im folgenden Hilfssatz unter Verwendung linearer Interpolation dieses Problem behandeln.

**Hilfssatz 4.8.** Für festes  $(\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  existiert genau ein  $l = l(j, k) = l_{j,k} \in \{0, \dots, n_\pi - 1\}$ , so dass für den Integranden  $f(\tau_m, \pi_j, z)$  des Integraloperators  $K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)}$  folgende Darstellung richtig ist:

$$f(\tau_m, \pi_j, z_k) = \tilde{d}_+(j, k, l_{j,k})G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + \tilde{d}_-(j, k, l_{j,k})G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1}) + \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \quad (4.36)$$

mit

$$\mathcal{R}_{IP}^{j,k} = \frac{1}{2!}(\pi_{j,k} - \pi_l)(\pi_{j,k} - \pi_{l+1})\partial_\pi^2 G^{1-\theta}(\tau_m, \xi_{j,k})$$

und  $\xi_{j,k} \in (\pi_l, \pi_{l+1})$  sowie

$$\tilde{d}_+(j, k, l_{j,k}) = (1 - p_l)\bar{f}(\tau_m, \pi_j, z_k), \quad \tilde{d}_-(j, k, l_{j,k}) = p_l\bar{f}(\tau_m, \pi_j, z_k) \quad \text{und} \quad p_l := \frac{\pi_{j,k} - \pi_l}{\pi_{l+1} - \pi_l}.$$

*Beweis:* Sei  $(\tau_m, \pi_j)$  fest gewählt, so betrachten wir

$$f(\tau_m, \pi_j, z_k) = G^{1-\theta}(\tau, \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k))\bar{f}(\pi_j, z_k).$$

Während der zweite Faktor elementar auswertbar ist, muß man im ersten Faktor

$$\pi_{j,k} = \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k) \in [\pi_l, \pi_{l+1})$$

für ein  $l = l_{j,k} \in \{0, \dots, n_\pi - 1\}$  berücksichtigen. Hilfssatz 4.6 liefert

$$\begin{aligned} G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k)) &= G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{j,k}) \\ &= G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + \frac{\pi_{j,k} - \pi_l}{\pi_{l+1} - \pi_l} (G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1}) - G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l)) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\omega(\pi_{j,k})\partial_\pi^2 G^{1-\theta}(\tau_m, \xi_{j,k}) \\ &= (1 - p_l)G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + p_l G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1}) + \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \end{aligned}$$

mit  $\omega(\pi_{j,k}) := (\pi_{j,k} - \pi_l)(\pi_{j,k} - \pi_{l+1})$  und  $p_l := \frac{\pi_{j,k} - \pi_l}{\pi_{l+1} - \pi_l}$  für ein  $\xi_{j,k} \in (\pi_l, \pi_{l+1})$ . q.e.d.

**Bemerkung 4.9.**

- 1) Wegen  $(\pi_j, z_k) \mapsto \pi_{j,k} \in [\pi_l, \pi_{l+1})$  existiert zu festem  $j \in \{0, \dots, n_\pi\}$ , für jedes  $k \in \{0, \dots, n_z\}$  genau ein  $l = l_{j,k}$ . Mit

$$M_l^j := \{k \in \{0, \dots, n_z\} : (j, k) \longrightarrow l = l_{j,k}\}$$

setzen wir

$$d^+(j, l) := \sum_{k \in M_l^j} \chi_k^s \tilde{d}_+(j, k, l_{j,k}), \quad d^-(j, l) := \sum_{k \in M_l^j} \chi_k^s \tilde{d}_-(j, k, l_{j,k})$$

mit  $d^+(j, l) + d^-(j, l) = \sum_{k \in M_l^j} \chi_k \bar{f}(x_j, z_k)$ .

2) Mit der Konvention  $\bar{f}_{m,j,k} = \bar{f}(\tau_m, \pi_j, z_k)$  und obigem Punkt 1) dieser Bemerkung ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k^s f(\tau_m, \pi_j, z_k) &= \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k^s G^{1-\theta}(\tau, \pi_j + \gamma(\pi_j, z_k)) \bar{f}(\pi_j, z_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k^s \left( (1 - p_l) \bar{f}_{m,j,k} G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + p_l \bar{f}_{m,j,k} G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1}) + \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \bar{f}_{m,j,k} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{n_\pi-1} \left( \sum_{k \in M_l^j} \chi_k^s \left( (1 - p_l) \bar{f}_{m,j,k} G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + p_l \bar{f}_{m,j,k} G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1}) \right) \right) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \bar{f}_{m,j,k} \\
 &= \sum_{l=0}^{n_\pi-1} \left( \sum_{k \in M_l^j} \left( \chi_k^s \tilde{d}_+(j, k, l_{j,k}) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + \chi_k^s \tilde{d}_-(j, k, l_{j,k}) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1}) \right) \right) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \bar{f}_{m,j,k} \\
 &= \sum_{l=0}^{n_\pi-1} (d^+(j, l) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + d^-(j, l) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1})) + \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \bar{f}_{m,j,k}. \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Weiterhin bemerken wir  $|\mathcal{R}_{IP}^{j,k}| \leq \tilde{C}_k \delta_\pi^2$  und damit

$$\left| \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \bar{f}_{m,j,k} \right| \leq n_z \max_{k=1, \dots, n_z} \{\tilde{C}_k\} \delta_\pi^2 = \frac{\delta_\pi^2}{\delta_z} \tilde{C}. \quad (4.38)$$

**Hilfssatz 4.10.** Sei  $d(j, 0) := d^+(j, 0)$ ,  $d(j, n_\pi) := d^-(j, n_\pi - 1)$  und

$$d(j, l) := d^-(j, l - 1) + d^+(j, l) \text{ für } l = 1, \dots, n_\pi - 1.$$

Für die Diskretisierung des Integraloperators  $K^E$  aus (4.35) ist

$$K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} = \frac{\lambda}{1 - \theta} \delta_z \sum_{l=0}^{n_\pi} d(j, l) G_l^{1-\theta, m} G_j^{\theta, m}.$$

Sei weiterhin  $s \in \{2, 4\}$  der Exponent aus Hilfssatz 4.4, Dann ist:

$$\left| K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} - K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} \right| \leq \tilde{C} (\delta_z^s + \delta_\pi^2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi} \|e^m\|). \quad (4.39)$$

*Beweis:*

1) Wegen Hilfssatz 4.4 und Bemerkung 4.9 berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
 K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} &:= \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \int_l^u G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_j + \gamma(\pi_j, z)) \bar{f}(\pi_j, z) dz \\
 &= \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \left( \delta_z \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k f(\tau_m, \pi_j, z_k) + \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s \right) \\
 &= \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \delta_z \left( \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k f(\tau_m, \pi_j, z_k) \right) \\
 &= \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \delta_z \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \delta_z \sum_{l=0}^{n_\pi-1} (d^+(j, l) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) + d^-(j, l) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_{l+1})).
 \end{aligned}$$

2) Demgemäß erlaubt obige Rechnung den Integraloprator  $K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)}$  gemäß

$$K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} = \frac{\lambda}{1-\theta} G_j^{\theta, m} \delta_z \sum_{l=0}^{n_\pi} (d^+(j, l) G_l^{1-\theta, m} + d^-(j, l) G_{l+1}^{1-\theta, m})$$

zu diskretisieren.

3) Mit 1) und 2) erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
 K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} &:= \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \delta_z \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{1-\theta} \delta_z \sum_{l=0}^{n_\pi} d(j, l) G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) G^\theta(\tau_m, \pi_j) \\
 K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} &= \frac{\lambda}{1-\theta} \delta_z \sum_{l=0}^{n_\pi} d(j, l) G_l^{1-\theta, m} G_j^{\theta, m}.
 \end{aligned}$$

4) Zunächst ist wegen der Beschränktheit der Funktion  $G$  und ihrer Ableitungen auf dem Kompaktum  $[0, T] \times \mathcal{S}$ , Hilfssatz 4.4 und (4.38)

$$\left| \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \mathcal{R}_{QF}^s \delta_z^s + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau_m, \pi_j) \delta_z \sum_{k=0}^{n_z} \chi_k \mathcal{R}_{IP}^{j,k} \right| < \tilde{C}(\delta_z^s + \delta_\pi^2). \quad (4.40)$$



Für die Differenz der Ausdrücke  $K^E$  und  $K^N$  erhalten wir unter Verwendung von

$$|xy - x'y'| \leq \tilde{C}(|x - x'| + |y - y'|) \text{ sofern } |x|, |x'|, |y|, |y'| \leq \tilde{C}$$

und (4.40) Folgendes:

$$\begin{aligned} & |K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} - K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)}| \\ & \leq \tilde{C}(\delta_z^s + \delta_\pi^2) + \delta_z \tilde{C} \sum_{l=0}^{n_\pi} (|G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) G^\theta(\tau_m, \pi_j) - G_l^{(1-\theta),m} G_j^{\theta,m}| \\ & \leq \tilde{C}(\delta_z^s + \delta_\pi^2) + \delta_z \tilde{C} \sum_{l=0}^{n_\pi} (|G^{1-\theta}(\tau_m, \pi_l) - G_l^{(1-\theta),m}| + |G^\theta(\tau_m, \pi_j) - G_j^{\theta,m}|) \\ & \leq \tilde{C}(\delta_z^s + \delta_\pi^2 + \delta_z n_\pi \|e^m\|) \\ & = \tilde{C}(\delta_z^s + \delta_\pi^2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi} \|e^m\|) \end{aligned}$$

q.e.d.

**Bemerkung 4.11.** Dabei haben wir im letzten Rechenschritt für  $\alpha > 0$  die Lipschitzstetigkeit der allgemeinen Potenzfunktion  $g(x) = x^\alpha: [x_l, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  für ein  $x_l > 0$  benutzt.

#### 4.2.4 Konvergenzbeweis für das explizite Verfahren

Im Folgenden leiten wir eine Abschätzung des Fehlers in der Maximumnorm

$$\|e^m\| = \max\{|e_j^m| : j \in \{0, \dots, n_\pi\}\}$$

her, wobei  $e_j^m := G(\tau_m, \pi_j) - G_j^m$  und unterscheiden bei der Berechnung von  $|e_j^m|$  die Fälle  $j = 0$ ,  $j \in \{1, \dots, n_{\pi-1}\}$  und  $j = n_\pi$ . Im Folgenden treffen wir für die Koeffizientenfunktionen  $a, b, c$  der PIDE (4.18) mit der klassischen Lösung  $G = G(\tau, \pi) \in \mathcal{C}^{2,4}$  die Vereinbarungen  $a_i = a(\pi_i)$ ,  $b_i = b(\pi_i)$  und  $c_i = c(\pi_i)$  für alle Zerlegungspunkte  $\pi_j$ ,  $j = 0, \dots, n_\pi$  des Intervalls  $\mathcal{S} = [0, 1]$ .

**Hilfssatz 4.12.** Für  $j = 0$  ergibt sich für beliebige  $m \in \{0, \dots, n_\tau - 1\}$  und einer vom  $m$  unabhängigen Konstanten  $\tilde{C} > 0$

$$|e_0^{m+1}| \leq (1 + \delta_\tau c_0) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi),$$

sofern einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

$$(1) \quad \theta < 0 \wedge \delta_\tau < \frac{\delta_\pi}{b_0 - \delta_\pi c_0}$$

$$(2) \quad \theta > 0 \wedge \delta_\pi \geq \frac{b_0}{c_0}$$

$$(3) \quad \theta > 0 \wedge \delta_\pi < \frac{b_0}{c_0} \wedge \delta_\tau < \frac{\delta_\pi}{b_0 - \delta_\pi c_0}$$

$$\text{mit } \frac{b_0}{c_0} = \frac{2\lambda_2(1-\theta)^2\sigma_R^2}{\theta\mu_2^2} \text{ und } \frac{\delta_\pi}{b_0 - \delta_\pi c_0} = \frac{2\delta_\pi(1-\theta)^2\sigma_R^2}{2\lambda_2(1-\theta)^2\sigma_R^2 - \delta_\pi\theta\mu_2^2}.$$

*Beweis:* Für  $j = 0$ , ist  $\pi = \pi_0 = 0$ ,  $a(0) = 0$  und  $K[G]|_{(\tau,0)} = 0$ . Damit ergibt sich für die PIDE (4.18) am linken Rand

$$\frac{\partial G(\tau, 0)}{\partial \tau} = b(0) \frac{\partial G(\tau, 0)}{\partial \pi} + c(0)G(\tau, 0).$$

Eine Taylorentwicklung liefert

$$\begin{aligned} & \frac{G(\tau + \delta_\tau, 0) - G(\tau, 0)}{\delta_\tau} - \frac{1}{2} \partial_\tau^2 G(\hat{\tau}, 0) \delta_\tau \\ &= b(0) \left( \frac{G(\tau, 0 + \delta_\pi) - G(\tau, 0)}{\delta_\pi} - \frac{1}{2} \partial_\pi^2 G(\tau, \hat{\pi}_+) \delta_\pi \right) + c(0)G(\tau, 0) \end{aligned}$$

für jeweils geeignete  $\hat{\tau} \in (0, T)$  und  $\hat{\pi}_+ \in (0, 1)$ . Unter Verwendung von  $\tau_{m+1} = \tau_m + \delta_\tau$  und  $\pi_1 = \pi_0 + \delta_\pi$  erhalten wir auf dem Gitter  $\mathcal{Q}_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  zu den Punkten  $(\tau_m, \pi_0)$  die diskrete Formulierung der PIDE (4.18)

$$\begin{aligned} & \frac{G(\tau_{m+1}, \pi_0) - G(\tau_m, \pi_0)}{\delta_\tau} - \frac{1}{2} \partial_\tau^2 G(\hat{\tau}, \pi_0) \delta_\tau \\ &= b_0 \frac{G(\tau_m, \pi_1) - G(\tau_m, \pi_0)}{\delta_\pi} - b_0 \frac{1}{2} \partial_\pi^2 G(\tau_m, \hat{\pi}_+) \delta_\pi + c_0 G(\tau_m, \pi_0) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} G(\tau_{m+1}, \pi_0) &= \Psi_2^0 G(\tau_m, \pi_0) + \Psi_1^{0,+} G(\tau_m, \pi_1) + \frac{1}{2} (\partial_\tau^2 G(\hat{\tau}, \pi_0) \delta_\tau^2 - b_0 \partial_\pi^2 G(\tau_m, \hat{\pi}_+) \delta_\pi \delta_\tau) \\ &= \Psi_2^0 G(\tau_m, \pi_0) + \Psi_1^{0,+} G(\tau_m, \pi_1) + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \end{aligned}$$

mit  $\Psi_2^0 = 1 + \delta_\tau c_0 - \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_0$ ,  $\Psi_1^{0,+} = \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_0$ . Mit dem numerischen Ansatz

$$G_0^{m+1} = \Psi_2^0 G_0^m + \Psi_1^{0,+} G_1^m$$

und  $e_0^{m+1} = G(\tau_{m+1}, \pi_0) - G_0^{m+1}$  seien nun  $\delta_\pi, \delta_\tau$  so gewählt, dass  $\Psi_2^0 > 0$ ,  $\Psi_1^{0,+} > 0$ . Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} |e_0^{m+1}| &\leq \Psi_2^0 |e_0^m| + \Psi_1^{0,+} |e_1^m| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \\ &\leq (\Psi_2^0 + \Psi_1^{0,+}) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \\ &= (1 + \delta_\tau c_0) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Wegen  $b_0 = \lambda_2 > 0$  ist  $\Psi_1^{0,+} > 0$  stets erfüllt. Dagegen ergibt sich aus der Forderung  $\Psi_2^0 > 0$  wegen

$$\Psi_2^0 = 1 + \delta_\tau c_0 - \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_0 > 0 \iff \delta_\tau \left( c_0 - \frac{b_0}{\delta_\pi} \right) > -1$$

und  $c_0 = \frac{\theta\mu_2^2}{2(1-\theta)^2\sigma_R^2}$  folgende Konvergenzbedingung:

1) Für  $\theta < 0$  ist  $c_0 < 0$  und damit  $c_0 - \frac{b_0}{\delta_\pi} < 0$ . Daher gilt  $\Psi_2^0 > 0$  sofern

$$\delta_\tau < \frac{\delta_\pi}{b_0 - \delta_\pi c_0} = \frac{2\delta_\pi(1-\theta)^2\sigma_R^2}{2\lambda_2(1-\theta)^2\sigma_R^2 - \delta_\pi\theta\mu_2^2}.$$

2) Im Fall  $\theta > 0$  muß wegen  $c_0 > 0$  entweder

- $c_0 - \frac{b_0}{\delta_\pi} \geq 0$  bzw.  $\delta_\pi \geq \frac{b_0}{c_0}$   
oder
- $c_0 - \frac{b_0}{\delta_\pi} < 0$  bzw.  $\delta_\pi < \frac{b_0}{c_0} = \frac{2\lambda_2(1-\theta)^2\sigma_R^2}{\theta\mu_2^2}$  und  $\delta_\tau < \frac{\delta_\pi}{b_0 - \delta_\pi c_0}$

gefordert werden.

q.e.d.

**Hilfssatz 4.13.** Für  $j = n_\pi$  ergibt sich für beliebige  $m \in \{0, \dots, n_\tau - 1\}$  mit einer von  $m$  unabhängigen Konstante  $\tilde{C} > 0$

$$|e_{n_\pi}^{m+1}| \leq (1 + \delta_\tau c_{n_\pi}) ||e^m|| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi),$$

sofern einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

$$(1) \quad \theta < 0 \wedge \delta_\tau < \frac{-\delta_\pi}{b_{n_\pi} + \delta_\pi c_{n_\pi}}$$

$$(2) \quad \theta > 0 \wedge \delta_\pi \geq -\frac{b_{n_\pi}}{c_{n_\pi}}$$

$$(3) \quad \theta > 0 \wedge \delta_\pi < -\frac{b_{n_\pi}}{c_{n_\pi}} \wedge \delta_\tau < \frac{-\delta_\pi}{b_{n_\pi} + \delta_\pi c_{n_\pi}}$$

$$\text{mit } \frac{\delta_\pi}{b_{n_\pi} + \delta_\pi c_{n_\pi}} = -\frac{2\delta_\pi(1-\theta)^2\sigma_R^2}{2\lambda_1(1-\theta)^2\sigma_R^2 - \delta_\pi\theta\mu_1^2} \text{ und } \frac{b_{n_\pi}}{c_{n_\pi}} = -\frac{2\lambda_1(1-\theta)^2\sigma_R^2}{\mu_1^2\theta}.$$

*Beweis:* Für  $j = n_\pi$  ist  $\pi_{n_\pi} = 1$  und damit  $a(1) = 0$  und  $K[G]|_{(t,1)} = 0$ . Damit erhalten wir am rechten Rand für die PIDE (4.18)

$$\frac{\partial G(\tau, 1)}{\partial \tau} = b(1) \frac{\partial G(\tau, 1)}{\partial \pi} + c(1)G(\tau, 1).$$

Mit den gleichen Argumenten wie in Hilfssatz 4.12 ergibt sich somit auf dem Gitter  $Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$  die diskrete Formulierung der PIDE (4.18)

$$\begin{aligned} & G(\tau_{m+1}, \pi_{n_\pi}) \\ &= \Psi_1^{n_\pi, -} G(\tau_m, \pi_{n_\pi-1}) + \Psi_2^{n_\pi} G(\tau_m, \pi_{n_\pi}) + \frac{1}{2} (b_{n_\pi} \partial_\pi^2 G(\tau_m, \hat{\pi}_-) \delta_\pi \delta_\tau + \partial_\tau^2 G(\hat{\tau}, \pi_{n_\pi}) \delta_\tau^2) \\ &= \Psi_1^{n_\pi, -} G(\tau_m, \pi_{n_\pi-1}) + \Psi_2^{n_\pi} G(\tau_m, \pi_{n_\pi}) + \frac{1}{2} \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \end{aligned}$$

mit  $\Psi_1^{n_\pi, -} := -\frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_{n_\pi}$ ,  $\Psi_2^{n_\pi} := 1 + \delta_\tau c_{n_\pi} + \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_{n_\pi}$ . Mit dem numerischen Ansatz

$$G_{n_\pi}^{m+1} = \Psi_1^{n_\pi, -} G_{n_\pi-1}^m + \Psi_2^{n_\pi} G_{n_\pi}^m$$

seien nun  $\delta_\pi, \delta_\tau$  so gewählt, dass  $\Psi_1^{n_\pi, -} > 0$ ,  $\Psi_2^{n_\pi} > 0$ . Mit  $e_{n_\pi}^{m+1} = G(\tau_m, \pi_{n_\pi}) - G_{n_\pi}^m$  berechnen wir

$$\begin{aligned} |e_{n_\pi}^{m+1}| &\leq \Psi_1^{n_\pi, -} |e_{n_\pi-1}^m| + \Psi_2^{n_\pi} |e_{n_\pi}^m| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \\ &\leq (\Psi_1^{n_\pi, -} + \Psi_2^{n_\pi}) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \\ &= (1 + \delta_\tau c_{n_\pi}) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Wegen  $b_{n_\pi} = -\lambda_1 < 0$  ist  $\Psi_1^{n_\pi, -} > 0$ . Dagegen liefert die Forderung  $\Psi_2^{n_\pi} > 0$  wegen

$$\Psi_2^{n_\pi} = 1 + \delta_\tau c_{n_\pi} + \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_{n_\pi} > 0 \iff \delta_\tau \left( c_{n_\pi} + \frac{b_{n_\pi}}{\delta_\pi} \right) > -1$$

und  $c_{n_\pi} = \frac{\theta \mu_1^2}{2(1-\theta)^2 \sigma_R^2}$  folgende Konvergenzbedingung:

- 1) Für  $\theta < 0$  ist  $c_{n_\pi} < 0$  und somit auch  $c_{n_\pi} + \frac{b_{n_\pi}}{\delta_\pi} < 0$ . Daher ist  $\Psi_2^{n_\pi} > 0$  sofern

$$\delta_\tau < \frac{-\delta_\pi}{b_{n_\pi} + \delta_\pi c_{n_\pi}} = \frac{2\delta_\pi(1-\theta)^2 \sigma_R^2}{2\lambda_1(1-\theta)^2 \sigma_R^2 - \delta_\pi \theta \mu_1^2}.$$

- 2) Im Fall  $\theta > 0$  muß wegen  $c_{n_\pi} > 0$  entweder

- $c_{n_\pi} + \frac{b_{n_\pi}}{\delta_\pi} \geq 0$  bzw.  $\delta_\pi \geq -\frac{b_{n_\pi}}{c_{n_\pi}}$   
oder
- $c_{n_\pi} + \frac{b_{n_\pi}}{\delta_\pi} < 0$  bzw.  $\delta_\pi < -\frac{b_{n_\pi}}{c_{n_\pi}} = \frac{2\lambda_1(1-\theta)^2 \sigma_R^2}{\theta \mu_1^2}$  und  $\delta_\tau < \frac{-\delta_\pi}{b_{n_\pi} + \delta_\pi c_{n_\pi}}$

gefordert werden.

q.e.d.

**Hilfssatz 4.14.** Für die inneren Knoten  $\pi_j$  mit  $j \in \{1, \dots, n_\pi - 1\}$  ergibt sich mit einer von  $m$  unabhängigen Konstante  $\tilde{C} > 0$  zu festem  $0 \leq m \leq n_\tau - 1$

$$|e_j^{m+1}| \leq \left( 1 + \delta_\tau \left( 2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi} \right) \tilde{C} \right) \|e^m\| + \tilde{C} \delta_\tau \left( \delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s \right),$$

sofern sofern einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

- (1)  $\theta < 0 \wedge \delta_\tau < k_1(\delta_\pi)$
- (2)  $\theta > 0 \wedge \delta_\pi \geq k_2$
- (3)  $\theta > 0 \wedge \delta_\pi < k_2 \wedge \delta_\tau < k_1(\delta_\pi)$

mit

$$k_1(\delta_\pi) = \frac{\delta_\pi^2}{\max_{\pi \in (0,1)} \{-\delta_\pi^2 c(\pi) + \delta_\pi |b(\pi)| + 2a(\pi)\}} \quad (4.43)$$

und

$$k_2 = \min_{\pi \in (0,1)} \left\{ \frac{|b(\pi)| + \sqrt{|b(\pi)|^2 + 8a(\pi)c(\pi)}}{2c(\pi)} \right\}.$$

*Beweis:* Für  $j \in \{1, \dots, n_\pi - 1\}$  erscheint die PIDE (4.18) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\tau, \pi)}{\partial \tau} &= a(\pi) \frac{\partial^2 G(\tau, \pi)}{\partial \pi^2} + b(\pi) \frac{\partial G(\tau, \pi)}{\partial \pi} + c(\pi) G(\tau, \pi) - \frac{\lambda}{1 - \theta} G(\tau, \pi) \\ &\quad + K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} \end{aligned}$$

und führt unter Verwendung von (4.27) bis (4.30) und der gleichen Argumentation wie in Hilfssatz 4.12 auf

$$\begin{aligned} G(\tau_{m+1}, \pi_j) &= \Psi_1^{j,-} G(\tau_m, \pi_{j-1}) + \Psi_2^j G(\tau_m, \pi_j) + \Psi_1^{j,+} G(\tau_m, \pi_{j+1}) - \frac{\delta_\tau \lambda}{1 - \theta} G(\tau_m, \pi_j) \\ &\quad + \delta_\tau K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} + \tilde{C} \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_\pi^2) \end{aligned}$$

mit

$$\Psi_1^{j,-} := \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi^2} a_j + \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_j^-, \quad \Psi_2^j := 1 + \delta_\tau c_j - 2a_j \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi^2} - \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} |b_j| \quad \text{und} \quad \Psi_1^{j,+} := \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi^2} a_j + \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} b_j^+.$$

Für die Gleichung in diskreter Form erhalten wir

$$G_j^{m+1} = \Psi_1^{j,-} G_{j-1}^m + \Psi_2^j G_j^m + \Psi_1^{j,+} G_{j+1}^m + \delta_\tau K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} - \frac{\delta_\tau \lambda}{1 - \theta} G_j^m.$$

Wählen wir  $\delta_\pi$  und  $\delta_\tau$ , so dass

$$\Psi_1^{j,\pm} > 0 \quad \text{und} \quad \Psi_2^j > 0, \quad (4.44)$$

dann erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |e_j^{m+1}| &= |G(\tau_{m+1}, \pi_j) - G_j^{m+1}| \\ &\leq \Psi_1^{j,-} |e_{j-1}^m| + \Psi_2^j |e_j^m| + \Psi_1^{j,+} |e_{j+1}^m| + \tilde{C} \delta_\tau |e_j^m| + \tilde{C} \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_\pi^2) \\ &\quad + \delta_\tau |K^E[G]|_{(\tau_m, \pi_j)} - K^N[G]|_{(\tau_m, \pi_j)}| \\ &\leq (\Psi_1^{j,-} + \Psi_2^j + \Psi_1^{j,+}) \|e^m\| + \tilde{C} \delta_\tau \|e^m\| + \tilde{C} \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_\pi^2) \\ &\quad + \tilde{C} \delta_\tau \left( \delta_z^s + \delta_\pi^2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi} \|e^m\| \right) \\ &\leq \left( 1 + \delta_\tau \left( 2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi} \right) \tilde{C} \right) \|e^m\| + \tilde{C} \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_\pi^2 + \delta_z^s). \end{aligned}$$

Wegen  $\delta_\pi < 1$  ist  $\delta_\pi^2 < \delta_\pi$ , und damit reduziert sich obige Ungleichung zu

$$|e_j^{m+1}| \leq \left(1 + \delta_\tau \left(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi}\right) \tilde{C}\right) \|e^m\| + \tilde{C} \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s).$$

Nun bestimmen wir die Restriktionen an die Schrittweiten  $\delta_\pi$  und  $\delta_\tau$ , so dass (4.44) richtig ist: Wegen  $a_j > 0$ ,  $b_j^\pm > 0$  ist  $\Psi_1^{j,\pm} > 0$ . Dagegen liefert  $\Psi_2^j > 0$  wegen

$$\Psi_2^j = 1 + \delta_\tau c_j - 2a_j \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi^2} - |b_j| \frac{\delta_\tau}{\delta_\pi} > 0 \iff \delta_\tau \left(c_j - \frac{2a_j}{\delta_\pi^2} - \frac{|b_j|}{\delta_\pi}\right) > -1$$

und  $c(\pi) = \frac{\theta}{2(1-\theta)^2} \sigma_R^{-2} (\mu_2 + \pi(\mu_1 - \mu_2))^2$  folgende Konvergenzbedingung:

- 1) Für  $\theta < 0$  ist  $c(\pi) < 0 \forall \pi \in (0, 1)$  und damit  $c_j - \frac{2a_j}{\delta_\pi^2} - \frac{|b_j|}{\delta_\pi} < 0$ . Daher ist  $\Psi_2^j > 0$  sofern

$$\delta_\tau < \frac{\delta_\pi^2}{-\delta_\pi^2 c_j + \delta_\pi |b_j| + 2a_j}.$$

- 2) Für  $\theta > 0$  muß wegen  $c(\pi) > 0$  entweder

2.1)

$$c_j - \frac{2a_j}{\delta_\pi^2} - \frac{|b_j|}{\delta_\pi} \geq 0 \text{ bzw. } \delta_\pi^2 - \frac{|b_j|}{c_j} \delta_\pi - \frac{2a_j}{c_j} \geq 0$$

oder

2.2)

$$c_j - \frac{2a_j}{\delta_\pi^2} - \frac{|b_j|}{\delta_\pi} < 0 \text{ bzw. } \delta_\pi^2 - \frac{|b_j|}{c_j} \delta_\pi - \frac{2a_j}{c_j} < 0$$

erfüllt sein. Der Fall 2.1) ergibt die möglichen Schrittweiten  $\delta_\pi \in (\delta_{\pi_-}, \delta_{\pi_+})$  mit

$$\delta_{\pi_\pm} = \frac{|b_j| \pm \sqrt{|b_j|^2 + 8a_j c_j}}{2c_j}.$$

Wegen  $\delta_{\pi_-} < 0$  genügt die Ortsschrittweite

$$\delta_\pi \geq \min_{\pi \in (0,1)} \left\{ \frac{|b(\pi)| + \sqrt{|b(\pi)|^2 + 8a(\pi)c(\pi)}}{2c(\pi)} \right\}.$$

ohne das man eine Restriktion an die Zeitschrittweite  $\delta_\tau$  beachten muß. Der Fall 2.2) führt mit der Restriktion an die Ortsschrittweite

$$\delta_\pi < \min_{\pi \in (0,1)} \left\{ \frac{|b(\pi)| + \sqrt{|b(\pi)|^2 + 8a(\pi)c(\pi)}}{2c(\pi)} \right\}.$$

zu einer Restriktion an die Zeitschrittweite

$$\delta_\tau < \frac{\delta_\pi^2}{-\delta_\pi^2 c_j + \delta_\pi |b_j| + 2a_j}.$$

q.e.d.

**Satz 4.15.** Sei  $G = G(\tau, \pi) \in \mathcal{C}^{2,4}$  und exakte Lösung der PIDE

$$\begin{aligned} G_\tau(\tau, \pi) &= a(\pi)G_{\pi\pi}(\tau, \pi) + b(\pi)G_\pi(\tau, \pi) + c(\pi)G(\tau, \pi) \\ &\quad + \frac{\lambda}{1-\theta} G^\theta(\tau, \pi) K[G]|_{(\tau, \pi)} \end{aligned}$$

und

$$\{G_j^m\}_{j,m} : Q_{\delta_\tau, \delta_\pi} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die numerische Lösung des diskretisierten Problems. Unter Berücksichtigung der Konvergenzbedingungen

$$\delta_\tau \leq \min_{\pi \in [0,1]} \frac{\delta_\pi^2}{-\delta_\pi^2 c(\pi) + \delta_\pi |b(\pi)| + 2a(\pi)} \quad (4.45)$$

$$\delta_z = \hat{c}\delta_\pi, \quad \hat{c} > 0 \quad (4.46)$$

erhalten wir

$$|G(\tau_m, \pi_j) - G_j^m| \longrightarrow 0 \quad \text{für } \delta_\pi \longrightarrow 0 \quad \forall (\tau_m, \pi_j) \in Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}.$$

*Beweis:* Zunächst liefern uns die Hilfssätze 4.12-4.14

$$\begin{aligned} |e_0^{m+1}| &\leq (1 + \delta_\tau c_0) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \\ |e_{n_\pi}^{m+1}| &\leq (1 + \delta_\tau c_{n_\pi}) \|e^m\| + \tilde{C}(\delta_\tau^2 + \delta_\tau \delta_\pi) \\ |e_j^{m+1}| &\leq \left(1 + \delta_\tau \left(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi}\right) \tilde{C}\right) \|e^m\| + \tilde{C} \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s) \end{aligned}$$

so das wir generische reelle Konstanten  $\tilde{C}_1$  und  $\tilde{C}_2$  finden und wir erhalten unmittelbar die Abschätzung

$$\|e^{m+1}\| \leq \left(1 + \delta_\tau \left(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi}\right) \tilde{C}_1\right) \|e^m\| + \tilde{C}_2 \delta_\tau (\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s). \quad (4.47)$$

Die Rekursion

$$\|e^{m+1}\| \leq g_1 \|e^m\| + g_2, \quad \text{mit } g_1, g_2 > 0$$

und  $\|e^0\| = 0$  ergibt durch wiederholtes Einsetzen gemäß

$$\begin{aligned} \|e^1\| &\leq g_2 \\ \|e^2\| &\leq g_1 \|e^1\| + g_2 \leq g_1 g_2 + g_2 = g_2(1 + g_1) \\ \|e^3\| &\leq g_1 \|e^2\| + g_2 \leq g_1 g_2(1 + g_1) + g_2 = g_2(1 + g_1 + g_1^2) \\ &\vdots \\ \|e^m\| &\leq g_1 \|e^{m-1}\| + g_2 \leq g_2 \sum_{l=0}^{m-1} g_1^l = g_2 \frac{g_1^m - 1}{g_1 - 1} \end{aligned}$$

und (4.47) mit  $\tilde{C}_3 = \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}$ ,  $g_1 = 1 + \delta_\tau(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi})\tilde{C}_1$  und  $g_2 = \tilde{C}_2\delta_\tau(\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s)$  folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \|e^m\| &\leq \tilde{C}_2\delta_\tau(\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s) \frac{(1 + \delta_\tau(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi})\tilde{C}_1)^m - 1}{(1 + \delta_\tau(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi})\tilde{C}_1 - 1)} \\
 &= \tilde{C}_3(\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s) \frac{(1 + \delta_\tau(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi})\tilde{C}_1)^m - 1}{(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi})} \\
 &\leq \frac{1}{2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi}} \tilde{C}_3(\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s) \left(1 + \frac{T}{n_\tau} (2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi}) \tilde{C}_1\right)^{n_\tau} - 1 \\
 &\leq \frac{1}{2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi}} \tilde{C}_3(\delta_\tau + \delta_\pi + \delta_z^s) \left(e^{T\tilde{C}_1(2 + \frac{\delta_z}{\delta_\pi})} - 1\right).
 \end{aligned}$$

Damit liegt im Fall  $\delta_z = \hat{c}\delta_\pi$  wegen

$$\begin{aligned}
 \|e^m\| &\leq \frac{1}{2 + \hat{c}} \tilde{C}_3(\delta_\tau + \delta_\pi + \hat{c}^s\delta_\pi^s) \left(e^{T\tilde{C}_1(2 + \hat{c})} - 1\right) \\
 &\leq \tilde{C}(\delta_\pi + \delta_\tau)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

lineare Konvergenz in  $\delta_\pi$  vor.

q.e.d.

### 4.3 Policy-Improvement

Die Anzahl d der möglichen Zustände  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, d$  der Markovkette  $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$  bestimmt die Anzahl der Zustandsvariablen  $\pi_1, \dots, \pi_{d-1}$  in der DPE (3.44). Aus diesem Grund eignet sich die Finite Differenzen Methode zur numerischen Lösung der DPE nur im Fall kleiner d. Da man das Nutzenmaximierungsproblem aber auch für eine beliebige (endliche) Anzahl von möglichen Zuständen der Markovkette Y numerisch behandeln möchte, muß man andere Wege beschreiten. Eine Alternative ist, die optimale Strategie  $h^*$  nicht mehr direkt über die Lösung der DPE Gleichung zu berechnen, sondern schrittweise eine Folge von Strategien  $\{h^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$  mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
 v^{(k)}(t, \pi) &\leq v^{(k+1)}(t, \pi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \theta \in (0, 1) \quad \text{bzw.} \\
 v^{(k)}(t, \pi) &\geq v^{(k+1)}(t, \pi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \theta < 0
 \end{aligned}$$

für

$$v^{(k)}(t, \pi) := v(t, \pi, h^{(k)}) = E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \pi, h^{(k)})}, h_s^{(k)}) ds \right\} \right) \tag{4.49}$$

zu erzeugen. Dieses kann man wie in den Papern [17] und [5] beschrieben mit dem Policy-Improvement erreichen. Damit berechnet man zwar keine im Sinne des Nutzenmaximierungsproblems optimale Strategie  $h^*$ , aber man verbessert sich ausgehend von einer Startstrategie  $h^{(0)}$  mit jedem Iterationsschritt. Dabei kann unter geeigneten Voraussetzungen die Folge der Strategien  $\{h^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$  gegen die optimale Strategie  $h^*$  konvergieren.



### 4.3.1 Theoretische Fundierung

**Satz 4.16.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $h^{(k)} \in \mathcal{H}$  eine zulässige Strategie,  $h_{\text{myop}}$  die myopische Strategie (vgl. Bemerkung 2.2) sowie  $v^{(k)}(t, \pi)$  gemäß (4.49). Dann ist mit

$$h^{(k+1)}(t, \pi) := h_{\text{myop}}(t, \pi) + \frac{1}{(1 - \theta)v^{(k)}(t, \pi)} (\sigma_R^\top)^{-1} \sum_{k=1}^{d-1} \beta_k(\pi) \partial_{\pi^k} v^{(k)}(t, \pi) \quad (4.50)$$

und der Annahme  $v^{(k)}, v^{(k+1)} \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \dot{S}) \cap \mathcal{C}^0([0, T] \times S)$ :

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(t, \pi) &\geq v^{(k)}(t, \pi), \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S} \text{ für } \theta \in (0, 1), \\ v^{(k+1)}(t, \pi) &\leq v^{(k)}(t, \pi), \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S} \text{ für } \theta < 0. \end{aligned}$$

*Beweis:* Wir werden den Beweis dieses Satzes exemplarisch für den Fall  $\theta \in (0, 1)$  durchführen. Der Beweis des Satzes im Fall  $\theta < 0$  erfolgt analog unter Beachtung des richtigen Relationszeichens  $\geq$  an den entsprechenden Stellen.

1) Unter Verwendung von

$$\Lambda^{(k)} := \Lambda_t^{(h^{(k)})} := \exp \left\{ - \int_0^t \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \Pi_0^{(h)}, h^{(k)})}, h_s^{(k)}) ds \right\}, \quad h^{(k)} \in \mathcal{H}$$

bemerken wir mit (3.36) zunächst die Martingaleigenschaft von

$$\Lambda_t^{(k)} v^{(k)}(t, \Pi_t^{(h^{(k)})}) \quad (4.51)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ , d.h. es gilt mit  $v(T, \Pi_T^{(h^{(k)})}, h^{(k)}) = 1$  insbesondere

$$\Lambda_t^{(k)} v^{(k)}(t, \Pi_t^{(h^{(k)})}) = E(\Lambda_T^{(k)} v^{(k)}(T, \Pi_T^{(h^{(k)})}) | \mathcal{F}_t^\Pi) = E(\Lambda_T^{(k)} | \mathcal{F}_t^\Pi).$$

Die Martingaleigenschaft von (4.51) impliziert das Verschwinden der Drift, so dass wir analog den Ideen des Beweises von Satz 3.6 unter Verwendung der Itô-Formel für Semimartingale folgende Ungleichungen schlussfolgern: Für  $(t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}$  ist

$$0 = \partial_t v^{(k)} + \mathcal{L}^{h^{(k)}} v^{(k)} - \tilde{b}(\pi, h^{(k)}) v^{(k)} \leq \partial_t v^{(k)} + \mathcal{L}^{h^{(k+1)}} v^{(k)} - \tilde{b}(\pi, h^{(k+1)}) v^{(k)}. \quad (4.52)$$

Die zweite Ungleichung erhält man aus dem Umstand, dass wir die Strategie  $h^{(k+1)}$  berechnen, indem wir die Drift des stochastischen Prozesses  $\Lambda_t^{(h)} v^{(k)}(t, \Pi_t^{(h^{(k)})})$  bezüglich  $h$  maximieren (im Fall  $0 < \theta < 1$ ) bzw. minimieren (im Fall  $\theta < 0$ ). Damit müssen wir das punktweise Optimierungsproblem

$$\sup_{r \in \mathcal{K}} \left\{ \text{sign}(\theta) (\mathcal{L}^r v^{(k)}(t, \pi) - \tilde{b}(\pi, r) v^{(k)}(t, \pi)) \right\}$$

lösen. Die gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 3.6 zur Berechnung der optimalen Strategie  $h^*$ , führt auf

$$h^{(k+1)}(t, \pi) := h_{myop}(t, \pi) + \frac{1}{(1 - \theta)v^{(k)}(t, \pi)} (\sigma^\top)^{-1} \sum_{k=1}^{d-1} \beta_k(\pi) \partial_{\pi^k} v^{(k)}(t, \pi).$$

2) Wendet man die Itô-Formel für Semimartingale auf den stochastischen Prozess

$$\Lambda_t^{(k+1)} v^{(k)}(t, \Pi_t^{(h^k)}) \quad (4.53)$$

an, so ist die Drift wegen (4.52) dieses Prozesses nichtnegativ. Folglich handelt es sich bei (4.53) um ein Submartingal und wegen  $v(T, \pi, h) = 1$  ist Folgendes richtig:

$$\Lambda_t^{(k+1)} v^{(k)}(t, \Pi_t^{(h^k)}) \leq E(\Lambda_T^{(k+1)} v^{(k)}(T, \Pi_T^{(h^k)}) | \mathcal{F}_t^\Pi) = E(\Lambda_T^{(k+1)} | \mathcal{F}_t^\Pi).$$

3) Zusammenfassend ergibt sich aus 1) und 2)

$$\Lambda_t^{(k+1)} v^{(k)}(t, \Pi_t^{(h^k)}) \leq E(\Lambda_T^{(k+1)} | \mathcal{F}_t^\Pi) = \Lambda_t^{(k+1)} v^{(k+1)}(t, \Pi_t^{(h^k)}).$$

Division durch  $\Lambda_t^{(k+1)}$  liefert die Behauptung, weil der Prozess  $\Pi_t^{(h^k)}$  beliebige Werte in  $\mathcal{S}$  annehmen kann. q.e.d.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten die Folgen  $\{v^{(k)}(t, \pi)\}_{k=1,2,\dots}$  und  $\{h^{(k)}(t, \pi)\}_{k=1,2,\dots}$  zu erzeugen. Die erste Möglichkeit bietet eine Monte-Carlo-Simulation des Erwartungswertes  $v^{(k)}(t, \pi)$  für jedes einzelne  $k$ . Die Zweite Möglichkeit besteht in der Ableitung einer Folge von PIDE Gleichungen, wobei dann  $v^{(k)}$  als Lösung der  $k$ -ten PIDE Gleichung erscheint. Aus der Kenntnis der  $k$ -ten Iterierten  $v^{(k)}$  berechnet sich dann jeweils  $h^{(k+1)}$  gemäß (4.50).

### 4.3.2 Monte-Carlo-Simulation

Im Folgenden beschränken wir uns auf den im ersten Paragraphen dieses Kapitels vorgestellten Modellfall  $n = 1$  und  $d = 2$  des unregularisierten Problems  $(UnRegP) = \{(4.6), (4.13), (4.14)\}$ . Eine Reparametrisierung hatte die Problemstellung auf die Ermittlung des Erwartungswertes

$$v^{(k)}(t, \pi) = E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \pi, h^{(k)})}, h_s^{(k)}) ds \right\} \right) \text{ mit } (t, \pi) \in [0, T] \times [0, 1]$$

reduziert, mit  $\tilde{b}(\pi, h)$  aus (4.12). Die Monte-Carlo-Simulation des Erwartungswertes  $v^{(k)}$  erfolgt nun in sieben Schritten, ausgehend von einer bekannten Strategie  $h^{(k)}$ : Im Fall  $k = 0$  sei  $h^{(0)}$  eine beliebige Anfangsstrategie, z.B. die myopische Strategie

$$h_{myop}(t, \pi) = \frac{\hat{\mu}(\pi)}{(1 - \theta)\sigma_R^2}$$

oder auch die *pure asset* Strategie  $h_{pa}(t, \pi) \equiv 1$  bzw. die *pure bond* Strategie  $h_{pb}(t, \pi) \equiv 0$ .

- 1.) Zunächst diskretisieren wir das Definitionsgebiet  $[0, T] \times [0, 1]$  gemäß

$$Q_{\delta_t, \delta_\pi} := \left\{ (t_m, \pi_j) : \begin{array}{ll} t_m = m\delta_t, & \delta_t = \frac{T}{n_t}, \quad m = 0, \dots, n_t \\ \pi_j = j\delta_\pi, & \delta_\pi = \frac{1}{n_\pi}, \quad j = 0, \dots, n_\pi \end{array} \right\}. \quad (4.54)$$

Zu jedem  $(t, \pi) \in Q_{\delta_t, \delta_\pi}$  arbeitet man die folgenden Schritte ab:

- 2.) Mit dem Verfahren von Euler-Maruyama generieren wir uns  $N$  Pfade  $(\Pi_s^i)_{s \in [t, T]}$ ,  $i = 1, \dots, N$  der Zustandsgleichung (4.6):

$$\begin{aligned} d\Pi_s^i &= (\alpha(\Pi_s^i) + \beta(\Pi_s^i)\theta\sigma_R h_s)ds + \beta(\Pi_s^i)dW_s + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\Pi_{s-}^i, z)\tilde{I}(ds \times dz) \\ \Pi_t^i &= \pi \end{aligned} \quad (4.55)$$

mit  $s \in [t, T)$  und  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  gemäß (4.7), (4.8) und (4.9).

- 3.) Anschließend ermitteln wir für jeden einzelnen Pfad  $(\Pi_s^i)_{s \in [t, T]}$  unter Verwendung numerischer Quadratur (hier Trapezformel) die Ausdrücke

$$\tilde{\Pi}^i := - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \pi, h^{(k)})}, h_s^{(k)}) ds, \quad i = 1, \dots, N.$$

- 4.) Unter Verwendung eines erwartungstreuen Schätzers approximieren wir die Reward Funktion  $v^{(k)}(t, \pi)$  gemäß

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp \{ - \tilde{\Pi}^i \}.$$

- 5.) Wegen  $h^{(k+1)}(t, \pi) = h_{myop}(t, \pi)$  für  $\pi \in \{0, 1\}$  genügt es, die gesuchte Strategie

$$h^{(k+1)}(t, \pi) = \frac{1}{(1 - \theta)\sigma_R^2} \left\{ \hat{\mu}(\pi) + \sigma_R \beta(\pi) \frac{\partial_\pi v^{(k)}(t, \pi)}{v^{(k)}(t, \pi)} \right\} \quad (4.56)$$

für die inneren Knoten  $(t, \pi) \in \mathring{Q}_{\delta_t, \delta_\pi}$  zu berechnen. Dazu verwenden wir als Approximation der ersten Ableitung  $\partial_\pi v^{(k)}(t, \pi)$  den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{v^{(k)}(t, \pi + \delta_\pi) - v^{(k)}(t, \pi - \delta_\pi)}{2\delta_\pi}.$$

Hierfür ist es unter Verwendung der Schritte 2.) bis 4.) erforderlich die Knotenwerte  $v^{(k)}(t, \pi \pm \delta_\pi)$  zu berechnen.

**Bemerkung 4.17.**

1. Die Berechnung der Iterierten  $h^{(k+1)}$  auf Basis der bekannten Strategie  $h^{(k)}$  erfordert die Berechnung von jeweils insgesamt  $(n_t - 1) \times (n_\pi - 1)$  Wertetripeln

$$((v^{(k)}(t, \pi \pm \delta_\pi)), v^{(k)}(t, \pi)).$$

Zu jedem einzelnen Element dieses Wertetripels ist das Lösen von  $N$  stochastischen Differentialgleichungen der Gestalt (4.55) nötig.

2. Berechnet man lediglich die erste Iterierte  $h^{(1)}$  auf Basis der Anfangsstrategie  $h^{(0)}$  genügt es, die Monte-Carlo-Simulation lediglich zu den Startwerten  $(t, \pi)$  zu berechnen, die bei der numerischen Lösung der Zustandsgleichung auftreten. Berechnet man allerdings weitere Iterierte muß man im Allgemeinen sämtliche Startwerte aus  $Q_{\delta_t, \delta_\pi}$  berücksichtigen, was den numerischen Aufwand ganz enorm erhöht und die Methode zur Berechnung weiterer Iterierten an die Grenzen ihrer Praxistauglichkeit bringt.

Im Folgenden betrachten wir die Ausführung von Schritt 2.), der numerischen Lösung der stochastischen Differentialgleichung (4.55). Gegeben seien zu diesem Zweck das Anfangswertepaar  $(t, \pi) \in \mathring{Q}_{\delta_t, \delta_\pi}$ . Im ersten Schritt führen wir die zur Schrittweite  $\Delta t = \frac{\delta_t}{K}$  mit  $K > 1$  äquidistante Zerlegung  $t := t^0 < t^1 < \dots < t^M$  der Zeitachse ein. Anschließend müssen wir uns sämtliche in der stochastischen Differentialgleichung (4.55) auftretenden Größen beschaffen. Neben den deterministischen (und gegebenen) Koeffizientenfunktionen  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\gamma_1$  bleibt die numerische Generierung der

- a) Inkremente des Standard-Wiener-Prozesses  $W$  gemäß

$$W_{t^{l+1}} - W_{t^l} \sim \sqrt{\Delta t} \xi_l^i, \quad \text{mit } (\xi_l^i)_{l=1, \dots, M} \text{ i.i.d. und } \xi_l^i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall \quad l = 1, \dots, M.$$

- b) als auch den *updates* (d.h. durch Expertenmeinungen verursachte Sprünge) der Zustandsgleichung (4.55) beschrieben durch den Integralterm. Hierfür ist es nötig den markierten Punktprozess  $(T_k, Z_k)_{k=0,1,\dots}$  (vgl. Seite 18) zu simulieren.

- i) Zum Ersten simulieren wir unter Verwendung der Inversionsmethode die mit dem Parameter  $\lambda$  exponentialverteilten Zeitdauern  $\mathcal{T}_i$  (mit Verteilungsfunktion  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sprungzeitpunkten  $T_i, T_{i+1}$  gemäß

$$\mathcal{T}_i = F^{-1}(U_i^1) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U_i^1)$$

mit  $U^1 \sim \text{Unif}[0, 1]$ . Damit berechnen wir dann  $T_k = \sum_{i=1}^k \mathcal{T}_i$ .

- ii) Zum Zweiten simulieren wir die Realisierungen der Expertenmeinungen  $Z_k$  bezüglich der bedingten Verteilung gegeben die Investorfiltration  $\mathbb{F}$ . Diese ist charakterisiert durch

$$\Pi_{T_k-} = P\left(\mu(Y_{T_k-}) = \mu_1 | \mathcal{F}_t\right) = 1 - P\left(\mu(Y_{T_k-}) = \mu_2 | \mathcal{F}_t\right).$$

Dies führt auf

$$Z_k = \mu(Y_{T_k}) + \varrho\eta, \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.57)$$

mit

$$\mu(Y_{T_k}) = \begin{cases} \mu_1 : U_k^2 \leq \Pi_{T_k-} \\ \mu_2 : U_k^2 > \Pi_{T_k-} \end{cases}, \quad U_k^2 \sim \text{Unif}[0, 1]. \quad (4.58)$$

und

$$\varrho = \begin{cases} \varrho = \varrho_1 : \mu(Y(T_k)) = \mu_1 \\ \varrho = \varrho_2 : \mu(Y(T_k)) = \mu_2 \end{cases}.$$

**Bemerkung 4.18.** Wir verwenden die in (4.9) vorkommenden bedingten Dichten als gestutzte Normalverteilungen gemäß (4.5). In diesem Sinne dient das in (4.57) beschriebene Szenario zur Auswahl des für die gestutzten Dichten zu verwenden Parametersatzes aus der Menge  $\{\kappa, (\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2)\}_{i=1,2}$ . Der Experte ist so modelliert, dass seine Aussagen  $Z_k$  im Mittel um den tatsächlichen Wert der nicht beobachtbaren Drift  $\mu(Y_{T_k})$  schwanken. Dieser Sachverhalt ist nun folgendermaßen modelliert: Sei die tatsächliche Drift beispielsweise  $\mu(Y_{T_k}) = \mu_1$ , dann lassen wir den Experten seine Aussagen nach der gestutzten Normalverteilung (4.5) entweder zum Parametersatz  $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}_1^2)$  oder zum Parametersatz  $(\tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}_2^2)$  treffen. Um nun zu entscheiden, welcher der beiden Parametersätze verwendet wird, betrachten wir den Wert des Filters  $\pi_{T_k-}$  unmittelbar vor dem *update*. Anschließend simulieren wir eine gleichverteilte Zufallsgröße  $U_k^2 \sim \text{Unif}[0, 1]$  und entscheiden uns dann gemäß (4.58) für einen der beiden Parametersätze.

Schließlich haben wir alle in der Zustandsgleichung (4.55) vorkommenden Größen bestimmt und verwenden zur numerischen Lösung dieser Gleichung das Verfahren von Euler-Maruyama, welches auf folgende Rekursion führt: Sei  $\mathbb{T} := \{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ , dann ist für sämtliche Zeitpunkte  $t^{l+1}$ , die kein Sprungzeitpunkt  $T_k$  sind

$$\Pi_{t^{l+1}} = \Pi_{t^l} + \alpha(\Pi_{t^l}, h^{(k)})\Delta_t + \beta(\Pi_{t^l})(W_{t^{l+1}} - W_{t^l}), \quad \Pi_{t^0} = \pi.$$

Erreicht die Rekursion allerdings einen Sprungzeitpunkt  $T_k$ , d.h. ist  $t^{l+1} \in \mathbb{T}$ , so berechnet sich der Zustandswert an der Stelle  $t^{l+1}$  gemäß

$$\begin{aligned} \Pi_{t^{l+1}-} &= \Pi_{t^l} + \alpha(\Pi_{t^l}, h^{(k)})\Delta_t + \beta(\Pi_{t^l})(W_{t^{l+1}} - W_{t^l}), \quad \Pi_{t^0} = \pi. \\ \Pi_{t^{l+1}} &:= \Pi_{t^{l+1}-} \frac{f_1(Z_k)}{\bar{f}(Z_k, \Pi_{t^{l+1}-})} \end{aligned}$$

wobei  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2$  die bedingten Dichten (4.5) sind und  $\bar{f}(z, \pi) = \pi f_1(z) + (1 - \pi)f_2(z)$ .

### 4.3.3 Finite Differenzen

Für den Modellfall  $n = 1$  und  $d = 2$  gibt es auch die Möglichkeit die Folge der Reward Funktionen  $v^{(k)}$  unter Verwendung der Finite Differenzen Methode zu berechnen, wie sie in Paragraph 4.2 dieses Kapitels behandelt wurde. Den Ausgangspunkt hierfür bietet Gleichung (4.52). Satz 4.16 liefert einen unmittelbaren Zugang, indem er ausgehend von einer bekannten Strategie  $h^{(k)}$  die verbesserte Strategie  $h^{(k+1)}$  gemäß (4.50) angibt. Die zur Berechnung der verbesserten Strategie  $h^{(k+1)}$  benötigte Funktion  $v^{(k)} := v(t, \pi, h^{(k)})$  können wir gemäß Gleichung (4.52) als Lösung der PIDE

$$\begin{aligned} \partial_t v^{(k)}(t, \pi) + (\mathcal{L}^{h^{(k)}} v^{(k)}(t, \pi) - \tilde{b}(\pi, h^{(k)}) v^{(k)}(t, \pi)) &= 0 \\ v^{(k)}(T, \pi) &= 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

gewinnen. Hierbei bezeichnet unter Berücksichtigung von Satz 3.6 und  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  aus (4.7), (4.8) und (4.9) für ein hinreichend reguläres  $g = g(t, \pi)$

$$\mathcal{L}^h g(t, \pi) = \frac{1}{2} \beta^2(\pi) \partial_\pi^2 g(t, \pi) + (\alpha(\pi) + \theta \beta(\pi) \sigma_R h) \partial g(t, \pi) + \lambda K g(t, \pi)$$

mit

$$K g(t, \pi) = \int_{\mathcal{Z}} \left\{ g(t, \pi + \gamma(\pi, z)) - g(t, \pi) \right\} \bar{f}(z, \pi) dz$$

und  $\mathcal{Z}$  gemäß (4.3) und  $\tilde{b}(p, h)$  aus (4.12). Insgesamt erhalten wir dann Gleichung (4.59) in der Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t v^{(k)}(t, \pi) + a(\pi) \partial_\pi^2 v^{(k)}(t, \pi) + \tilde{b}(\pi, h^{(k)}) \partial_\pi v^{(k)}(t, \pi) + c(\pi, h^{(k)}) v^{(k)}(t, \pi) \\ &\quad + \lambda \mathcal{K} v^{(k)}(t, \pi) \\ 1 &= v^{(k)}(0, \pi). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Hierbei seien die Koeffizientenfunktionen gegeben durch

$$\begin{aligned} a(\pi) &= \frac{1}{2} \beta^2 \\ b(\pi, h) &= \alpha(\pi) + \theta \sigma_R \beta(\pi) h \\ c(\pi, h) &= -\tilde{b}(\pi, h). \end{aligned}$$

Die PIDE (4.60) entspricht ihrer Struktur nach genau jener Gleichung, welche wir im Paragraphen 4.2 behandelt haben. Entsprechend den Ausführungen dieses Paragraphen können wir dann, ausgehend von einer beliebigen Anfangsstrategie  $h^{(0)}$ , für die PIDE (4.60) ein Differenzenschema gemäß (4.31) aufstellen, und anhand der numerischen Lösung der diskretisierten Gleichung eine verbesserte Strategie  $h^{(k+1)}$  berechnen. Mit Kenntnis von  $h^{(k+1)}$  können wir abermals obige PIDE lösen und berechnen wie oben beschrieben  $v^{(k+1)}$ . Auf diese Weise fahren wir fort und haben somit neben der Monte-Carlo-Methode eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von Folgen von Iterierten für  $v^{(k)}$  und  $h^{(k)}$  zu einem beliebigen Rekursionsanfang  $h^{(0)} \in \mathcal{H}$ .

**Bemerkung 4.19.**

1. Die Monte-Carlo Simulation funktioniert auch im allgemeinen Fall des Nutzenmaximierungsproblems mit  $d$  möglichen Zuständen und  $n$  Aktienpreisprozessen. Der Nachteil dieser Methode ist ihr numerischer Aufwand. Aus diesem Grund wurde im Paper von [17] auch lediglich die erste Iterierte  $h^{(1)}$  auf Basis des Rekursionsanfangs  $h^{(0)} = h_{myop}$  berechnet. Somit können wir zusammenfassend sagen, dass die Methode sich zwar im allgemeinen Fall eignet, man aber aus Gründen des numerischen Aufwands nur wenige Iterierte berechnen kann.
2. Die Finite Differenzen Methode zur Erzeugung der Folgen  $\{v^{(k)}\}_{k=1,2}$  und  $\{h^{(k)}\}_{k=1,2}$  eignet sich im Gegensatz zur Monte-Carlo-Simulation nicht für den allgemeinen Fall. Da die Anzahl der möglichen Zustände der Markovkette, gleich der Anzahl  $d$  (bzw.  $d - 1$ ) der Komponenten der Zustandvariable  $\pi$  ist, eignet sich die Methode zwar für eine beliebige Anzahl von Aktienpreisprozessen, jedoch nur für kleine  $d$ . Größere  $d$  bedeuten für die Finite Differenzen Methode einen erhöhten Aufwand. Der Vorteil dieser Methode besteht allerdings darin, zumindest im Falle beliebiger  $n$  und kleiner  $d$ , auch weitere Iterierte  $h^{(k)}$  und  $v^{(k)}$  zu berechnen.

## 4.4 Numerik des regularisierten Problems

In diesem Paragraphen möchten wir für den zu Beginn des Kapitels formulierten Modellfall  $n = 1$  und  $d = 2$  die Sätze 3.13 und 3.14 numerisch nachvollziehen. Zu diesem Zweck formulieren wir für das regularisierte Problem  $(RegP) := ((4.62), (3.54), (3.55))$  aus Kapitel 3.3.2 den erwähnten Modellfall.

### 4.4.1 Modellfall

Mit

$$\mathcal{S}_\varepsilon = \{\pi \in \mathbb{R} : -\varepsilon \leq \pi \leq 1 + \varepsilon\} \quad (4.61)$$

sowie  $\underline{\beta}(\pi)$ ,  $\underline{\gamma}(\pi, z)$ ,  $\underline{\alpha}(\pi, h)$  gemäß (3.51) und

$$\underline{\alpha}(\pi, h) = \alpha(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R h$$

mit  $\alpha(\pi)$ ,  $\beta(\pi)$  und  $\gamma(\pi, z)$  gemäß (4.7), (4.8) und (4.9) arbeiten wir für  $m \in \mathbb{N}$  mit der Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} d^m \Pi_t &= \underline{\alpha}(^m \Pi_t, h_t) dt + \underline{\beta}^\top(^m \Pi_t) dW_t + \int_{\mathcal{Z}} \underline{\gamma}(^m \Pi_{t-}, z) \tilde{I}(dt \times dz) + \frac{1}{\sqrt{m}} d\tilde{B}_t \quad (4.62) \\ ^m \Pi_0 &= \tilde{p}_0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.20.** Während es für theoretische Betrachtungen gemäß §3.3.1 einer Zustandsgleichung (3.52) bedarf, welche von einem exogenen Poissonprozess getrieben ist, ziehen wir in numerischen Betrachtungen die Arbeit mit der Zustandsgleichung (4.62) vor. Dies können wir ohne Bedenken machen, da gemäß Paragraph 5.1 aus [18] die inverse Rosenblatt Transformation die Verteilungsgesetze der Sprünge des Zustandsprozesses invariant läßt.

Im Modellfall  $n = 1$  und  $d = 2$  ist wegen (3.53) und  $\tilde{b}$  gemäß (4.12) mit

$$\begin{aligned} b_\star &:= \min\{\tilde{b}(\pi, h) : \pi \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{K}\} \\ b^\star &:= \max\{\tilde{b}(\pi, h) : \pi \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

schließlich

$$\underline{\tilde{b}}(\pi, h) = \begin{cases} \tilde{b} : \tilde{b} \in [b_\star, b^\star] \\ b_\star : \tilde{b} \in (-\infty, b_\star) \\ b^\star : \tilde{b} \in (b^\star, \infty) \end{cases} . \quad (4.63)$$

Das regularisierte Problem (*RegP*) kann entsprechend Kapitel 3 durch Bearbeitung des Endwertproblems (3.57) für  $V^m \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \partial_t V^m(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{ {}^m\mathcal{L}^r V^m(t, \pi) - \underline{\tilde{b}}(\pi, r) V^m(t, \pi) \} &= 0 \\ V^m(T, \pi) &= 1 \end{aligned}$$

mit

$${}^m\mathcal{L}^r g(\pi) = \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\beta}^2(\pi) + \frac{1}{2m} \right\} \partial_\pi^2 g(\pi) + \tilde{\alpha}(\pi, r) \partial_\pi g(\pi) + \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{ g(\pi + \tilde{\gamma}(\pi, z)) - g(\pi) \} \bar{f}(z, \pi) dz$$

gelöst werden. Ausgeschrieben ergibt sich für den Modellfall folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t V^m(t, \pi) + a(\pi) \partial_\pi^2 V^m(t, \pi) + b(\pi) \partial_\pi V^m(t, \pi) \\ &\quad + \sup_{r \in \mathcal{K}} \left\{ d(\pi, \partial_\pi V^m(t, \pi), V^m(t, \pi); r) \right\} + \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{ V(t, \pi + \tilde{\gamma}(\pi, z)) - V(t, \pi) \} \bar{f}(z, \pi) dz \\ 1 &= V^m(T, \pi) \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$a(\pi) = \frac{1}{2} \tilde{\beta}^2(\pi) + \frac{1}{2m} \quad (4.65)$$

$$b(\pi) = \tilde{\alpha}(\pi) \quad (4.66)$$

$$d(\pi, v, w; r) = \tilde{\beta}(\pi) \theta \sigma_R r v - \underline{\tilde{b}}(\pi, r) w. \quad (4.67)$$

Damit die Zustandsgleichung (4.62) von (*RegP*) wohldefiniert ist, muß insbesondere gemäß Annahme 3.11 und (3.50) für  $\varepsilon$  aus (4.61) die Bedingung

$$\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} := \frac{C_1}{C_2} \quad (4.68)$$

erfüllt sein.



**Bemerkung 4.21.** Während wir im Modellfall des unregularisierten Problems unter der Annahme  $h^* \in \mathring{\mathcal{K}}$  Gleichung (4.16) in Gleichung (4.18) überführen konnten, ist dies im Fall des regularisierten Problems mit Gleichung (4.64) schon nicht mehr möglich, weil die Formel (4.15) für  $h^*$  lediglich im Intervall  $\mathcal{S} = [0, 1]$  richtig ist, und die Funktion  $\tilde{b}$  für  $\pi \notin \mathcal{S}$  gemäß (4.63) gestutzt wird.

#### 4.4.2 Explizites Differenzenverfahren

Für die nichtlineare Gleichung (4.64), welche sich strukturell von Gleichung (4.18) unterscheidet, werden wir nun ein explizites Differenzenverfahren angeben. Im Gegensatz zu Gleichung (4.18) ist das Definitionsgebiet  $[0, T) \times \mathbb{R}$ , also insbesondere lebt  $\pi$  auf ganz  $\mathbb{R}$ . Möchte man Gleichung (4.64) diskretisieren, muß man diese auf einem endlichen Definitionsbereich betrachten. Zu geeigneten  $x_a < -\varepsilon$  und  $x_b > 1 + \varepsilon$  sowie  $\varepsilon$  gemäß (4.68) diskretisieren wir die Gleichung (4.64) auf

$$Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}^{Reg} := \left\{ (\tau_m, \pi_j) : \begin{array}{lll} \tau_m = m\delta_\tau, & \delta_\tau = \frac{T}{n_\tau}, & m = 0, \dots, n_\tau \\ \pi_j = \pi_a + j\delta_\pi, & \delta_\pi = \frac{\pi_b - \pi_a}{n_\pi}, & j = 0, \dots, n_\pi \end{array} \right\} \subset [0, T) \times \mathbb{R} \quad (4.69)$$

mit

$$\pi_a = \pi_0 < \dots < -\varepsilon < 0 < 1 + \varepsilon < \pi_b = \pi_{n_\pi}.$$

Da es sich bei den  $f_i$  um die gestutzten Dichten aus (4.5) mit dem Definitionsbereich (4.3)

$$\mathcal{Z} = [l, u], \quad l = l(\kappa), \quad u = u(\kappa)$$

handelt und die Parameter  $(\mu_i, \varrho_i^2)$ ,  $i = 1, 2$  des (diskreten) Experten wegen Hilfssatz 4.1 im Allgemeinen nicht mehr dem Mittelwert und der Varianz gestutzt normalverteilter Zufallsgrößen entsprechen, steht man zunächst vor folgender Aufgabe:

Man finde  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2 > 0$  und ein  $\kappa > 0$ , so dass mit  $\Upsilon^E, \Upsilon^V$  aus Hilfssatz 4.1

$$\begin{aligned} \Upsilon^E(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}_1) &= \mu_1 \\ \Upsilon^V(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}_1) &= \varrho_1^2 \\ \Upsilon^E(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}_2) &= \mu_2 \\ \Upsilon^V(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}_2) &= \varrho_2^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

sowie für ein geeignetes  $N \in \mathbb{N}$  und  $\bar{\varepsilon}$  aus (4.68) zusätzlich

$$N\delta_\pi < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} \quad (4.71)$$

richtig ist.

**Bemerkung 4.22.** Die Theorie verlangt Dichten  $f_i$ ,  $i = 1, 2$  mit kompaktem Träger. Verwenden wir Normalverteilungsdichten, können wir diese Forderung sicherstellen, in dem wir diese auf einem endliche Intervall abschneiden und normieren. Wir erhalten

dann gestutzte Normalverteilungsdichten. Parallel dazu müssen wir  $\mathcal{S}_\varepsilon$  so wählen, dass Bedingung (4.68) nicht verletzt wird. In der Theorie stellt diese Forderung kein Problem dar. Wenden wir uns der numerischen Betrachtungsweise zu, müssen wir zwei Dinge beachten:

- 1.) Die Menge der Werte  $\{\mu_1, \mu_2\}$ , welche die Drift annehmen kann, werden die Parameter sein, welche in den Koeffizientenfunktionen  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\alpha}$  einen Teil der Parameter des Nutzenmaximierungsproblems bilden. Die Koeffizientenfunktion  $\tilde{\gamma}$  stellt allerdings einen Sonderfall dar. Durch das Stutzen der Normalverteilungsdichten entsprechen die Parameter  $(\mu_i, \varrho_i^2)$  im Allgemeinen nicht mehr dem Mittelwert und der Varianz der Expertenmeinungen. Wollen wir also sicherstellen, dass der Experte seine Aussagen weiterhin im Mittel um die tatsächlichen Werte der Drift wählt, so muß man das obige nichtlineare Gleichungssystem lösen, und Parameter  $(\tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ , so bestimmen, dass sie vermöge des Stutzen tatsächlich die gewünschten Mittelwerte  $\mu_i$  und Varianzen  $\varrho_i^2$  für  $i = 1, 2$  erzeugen.
- 2.) Weiterhin ist zu beachten, dass wir das Stutzen der Normalverteilungen in Abhängigkeit des  $\kappa$ - $\varrho$  Bereichs vornehmen und zusätzlich die Forderung (4.71) erfüllen müssen. Würden wir zu wenig abschneiden, d.h.  $\kappa$  zu groß wählen, könnte der Fall  $\varepsilon < \delta_\pi$  eintreten. Da wir auf einem Rechner nur mit endlicher Genauigkeit rechnen können, müssen wir also den Spagat zwischen der Konstruktion eines geeigneten  $\kappa$  und der simultanen Bestimmung der Parameter der bedingten Dichten meistern.

Wir folgen nun den in Paragraph 4.2.2 vorgezeichneten Weg zur Aufstellung eines Differenzschemas, indem wir für  $G^{Reg}(\tau, \pi) \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$  zunächst vermöge der Transformation  $\tau := T - t$  das Endwertproblem (4.64) in das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} & \partial_\tau G^{Reg}(\tau, \pi) \\ &= a(\pi) \partial_\pi^2 G^{Reg}(\tau, \pi) + b(\pi) \partial_\pi G^{Reg}(\tau, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \left\{ d(\pi, \partial_\pi G^{Reg}(\tau, \pi), G^{Reg}(\tau, \pi); r) \right\} \\ & \quad + \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{ G^{Reg}(\tau, \pi + \tilde{\gamma}(\pi, z)) - G^{Reg}(\tau, \pi) \} \bar{f}(z, \pi) dz \end{aligned}$$

mit  $G^{Reg}(0, \pi) = 1$  überführen. Während  $G^{Reg}$  die exakte Lösung obiger Gleichung ist, bezeichnen wir mit

$$\{G_j^{Reg,m}\}_{m,j}: \quad Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}^{Reg} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\tau_m, \pi_j) \longrightarrow G_j^{Reg,m}$$

die numerische Lösung des diskretisierten Problems. Mit dem weiter unten definierten  $d_j$  ist

$$\mathcal{L}_{\delta_\pi}^{Reg,m,j} := a_j \frac{G_{j-1}^{Reg,m} - 2G_j^{Reg,m} + G_{j+1}^{Reg,m}}{\delta_\pi^2} + b_j^+ \frac{G_{j+1}^{Reg,m} - G_j^{Reg,m}}{\delta_\pi} - b_j^- \frac{G_j^{Reg,m} - G_{j-1}^{Reg,m}}{\delta_\pi} + d_j$$

und

$$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{Reg,m,j} := \begin{cases} K^{Reg,N}[G^{Reg}]|_{(\tau_m, \pi_j)} - \lambda G_j^{Reg,m} & : j \in \{1, \dots, n_\pi - 1\} \\ 0 & : j \in \{0, n_\pi\} \end{cases}$$

sowie

$$K^{Reg,N}[G^{Reg}]|_{(\tau_m, \pi_j)} = \lambda \delta_z \sum_{l=0}^{n_\pi} d(j, l) G_l^{Reg,m} \quad (4.72)$$

formulieren wir ein explizites Differenzenverfahren:

$$\frac{G_j^{m+1} - G_j^m}{\delta_\tau} = \mathcal{L}_{\delta_\pi}^{Reg,m+1,j} + K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{Reg,m,j}. \quad (4.73)$$

Die Größe  $d_j$  entsteht dabei durch punktweise Supremumsbildung mit  $d$  aus (4.67) und geeignetem  $\mathcal{K} = [h_{min}, h_{max}]$  gemäß

$$d_j := \sup_{r \in \mathcal{K}} \{c(\pi_j, u, v; r)\}, \quad u = G_j^{Reg,m}, \quad v = \frac{G_{j+1}^{Reg,m} - G_{j-1}^{Reg,m}}{2\delta_\pi}. \quad (4.74)$$

Die  $d(i, j)$  aus (4.72) werden auf dieselbe Weise konstruiert wie in Bemerkung 4.9 und Punkt 3. des Beweises von Hilfsatz 4.10. Aus (4.73) erhalten wir unmittelbar

$$G_j^{Reg,m+1} = G_j^{Reg,m} + \delta_\tau \mathcal{L}_{\delta_\pi}^{Reg,m,j} + \delta_\tau K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{Reg,m,j}$$

bzw.

$$G_j^{Reg,m+1} = \Psi_1^{j,-} G_{j-1}^{Reg,m} + \Psi_2^j G_j^{Reg,m} + \Psi_1^{j,+} G_{j+1}^{Reg,m} + \delta_\tau K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{Reg,m,j} \quad (4.75)$$

mit  $\Psi_1^{j,\pm}$  und  $\Psi_2^j$  aus (4.33).

**Bemerkung 4.23.** Während per Definition die Koeffizienten  $b$  und  $d$  gemäß (4.66) und (4.67) der Gleichung (4.72) am linken und rechten Rand des Gitters  $Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}^{Reg}$  verschwinden, ist

$$a(\pi_j) = \frac{1}{2m}, \quad j \in \{0, n_\pi\}.$$

Aus diesem Grund ist die Rekursion (4.75) nur durchführbar, sofern an den Randknoten  $(\tau_m, \pi_j)$  mit  $(m, j) \in \{0, \dots, n_\tau\} \times \{0, n_\pi\}$  Randbedingungen gesetzt werden. Diese Forderung ist rein numerischer Natur.

## 5 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel möchten wir die Resultate der in MATLAB implementierten numerischen Verfahren aus Kapitel 4 vorstellen. Als Modellbeispiel dient uns das Finanzmarktmodell aus Paragraph 2.1, d.h.  $n = 1$  und  $d = 2$ . An dieser Stelle legen wir den numerischen Resultaten folgenden Parametersatz zu Grunde:

Markovkette	Zustände der Drift	$\mu_1$	0.3
		$\mu_2$	-0.1
	Intensitäten (Generator)	$q_1$	1
		$q_2$	2
Filter	Anfangswert	$\check{p}_0$	2/3
Wertpapier	Volatilität	$\sigma_R$	0.2
Experte	Intensität	$\lambda$	10
	Standardabweichung	$\varrho_i, i = 1, 2$	0.3
	Abschneideparameter	$\kappa$	5
Nutzenfunktion	Nutzenparameter	$\theta$	0.5

Tabelle 5.1: Parametersatz für Modellfall

### 5.1 Wertfunktionen und optimale Strategien

Mit  $\hat{\mu} = \pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2$  und  $\beta(\pi) = \pi(1 - \pi)(\mu_1 - \mu_2)\sigma_R^{-1}$  berechnet sich unter der Annahme  $h^* \in \mathcal{K}$  die optimale Strategie gemäß (4.15)

$$h^* = h^*(t, \pi) = \frac{1}{(1 - \theta)\sigma_R^2} \left\{ \hat{\mu}(\pi) + \sigma_R \beta(\pi) \frac{\partial_\pi V(t, \pi)}{V(t, \pi)} \right\}$$

in zwei Schritten:

- 1) Zunächst bedarf es einer (in der Praxis numerischen) Lösung der PIDE (4.18). Auf Basis dieser Lösung erhält man dann  $h^*(t, \pi)$  mit dem Definitionsbereich  $[0, T] \times \mathcal{S}$ . Hierbei handelt es sich um eine deterministische Funktion.
- 2) Möchte ein Investor zum Zeitpunkt  $t_0$  eine konkrete Anlageentscheidung treffen, muß er auf Basis der Renditen und Expertenmeinungen innerhalb des Zeitraums  $[0, t_0]$  die stochastische Differentialgleichung (4.6), ggf. (numerisch), auf  $[0, t_0]$  lösen. Damit erhält er den Zustandsprozess  $(\Pi_s^*)_{s \in [0, t_0]}$ . Anschließend setzt er den Endwert  $\Pi_{t_0}^*$  in die in Schritt 1) berechnete deterministische Funktion  $h^*(t, \pi)$  ein und gewinnt seine Anlageentscheidung zum Zeitpunkt  $t_0$  gemäß  $h_{t_0}^* := h^*(t_0, \Pi_{t_0}^*)$ .

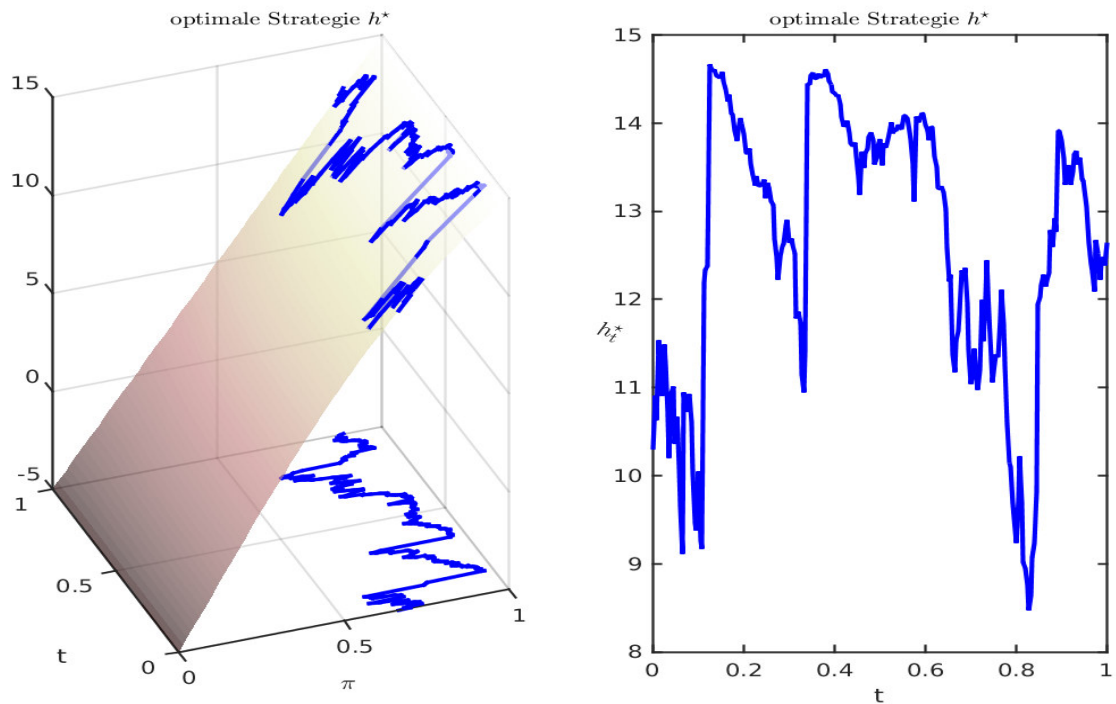


Abbildung 5.1:

LINKS: Optimaler Zustandsprozess  $(\Pi_t^*)_{t \in [0, T]}$ , optimale Strategie  $(h^*)_{t \in [0, T]}$  mit  $h_t^* := h^*(t, \Pi_t^*)$  mit Funktion  $h^*(t, \pi)$ , welche sich aus Lösung der DPE (4.18) ergibt

RECHTS: Separate Betrachtung der optimalen Strategie  $h_t^* := h^*(t, \Pi_t^*)$

Auf die gleiche Art und Weise können wir auch die myopische Strategie berechnen und sehen in der folgenden Abbildung einen Vergleich zwischen optimaler und myopischer Strategie.

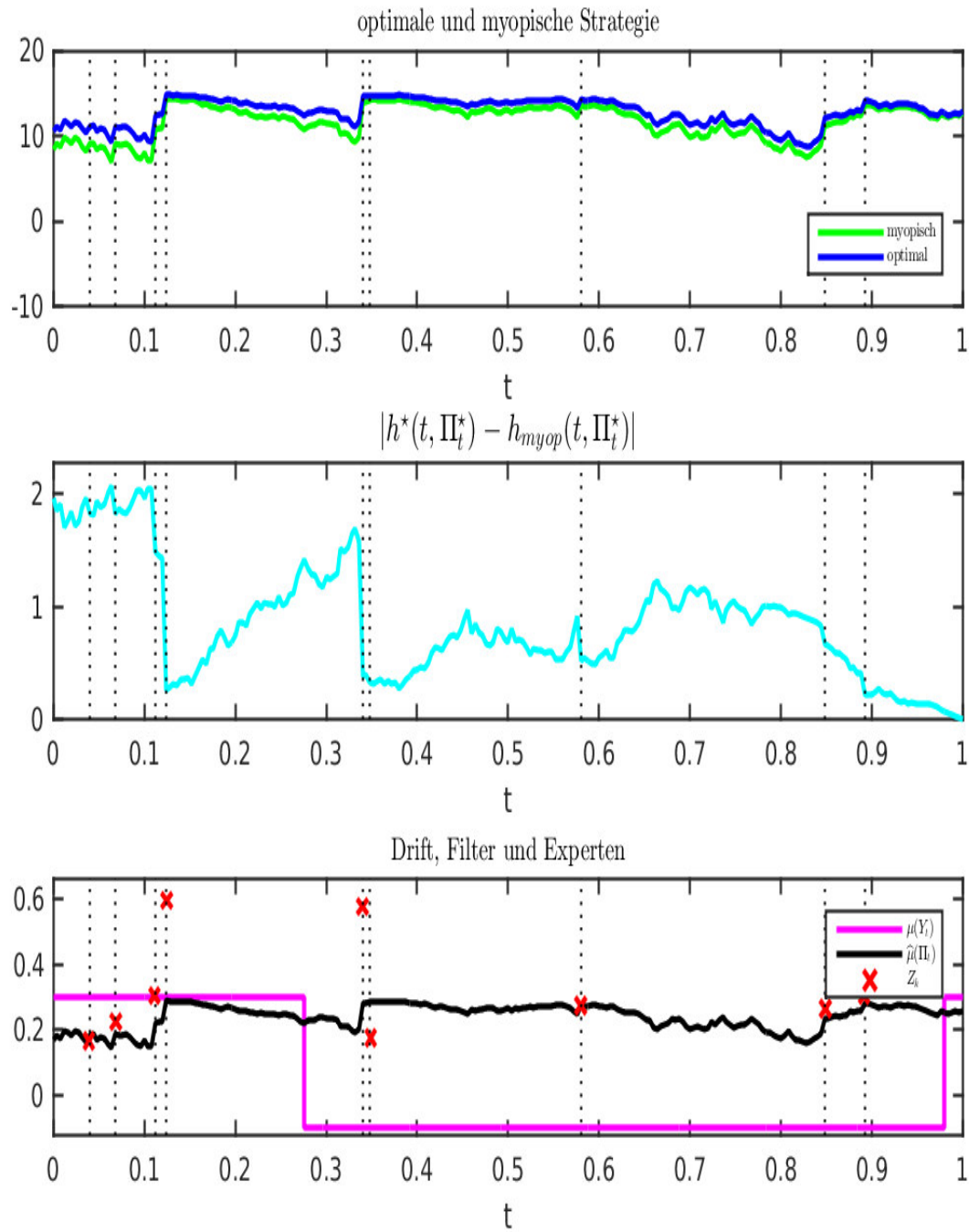


Abbildung 5.2:

OBEN: Vergleich zwischen optimaler und myopischer Strategie

MITTE: Absolute Abweichung  $|h_{myop}(t, \Pi_t^*) - h^*(t, \Pi_t^*)|$  mit dem Zustandsprozess  $\Pi^*$

UNTEN: Drift  $\mu(Y_t)$ , Filter  $\hat{\mu}(\Pi_t)$ , Expertenaussagen  $Z_k$  zum Zeitpunkt  $t = T_k$

Nun werden wir einige grundsätzliche Bemerkung über die optimale Strategie  $h^*$  und die myopische Strategie  $h_{myop}$  verlieren. Wir beobachten

- (i)  $h^*(t, \pi) = h_{myop}(t, \pi)$  für alle  $(t, \pi) \in [0, T) \times \{0, 1\}$
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow T} h^*(t, \pi) = h_{myop}(T, \pi)$  für alle  $\pi \in \mathcal{S} = [0, 1]$
- (iii)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} h^*(t, \pi) = h_{myop}(t, \pi)$  für alle  $(t, \pi) \in [0, T) \times \mathcal{S}$ .

Dabei sind (i) und (ii) als Plausibilitätstest an die in Kapitel 4 entwickelten Differenzenverfahren zur Lösung der DPE (4.18) zu verstehen, auf deren Basis man die optimalen Strategien  $h^*(t, \pi)$  berechnet, da dieser Zusammenhang bereits aus (3.42) unmittelbar hervorgeht.

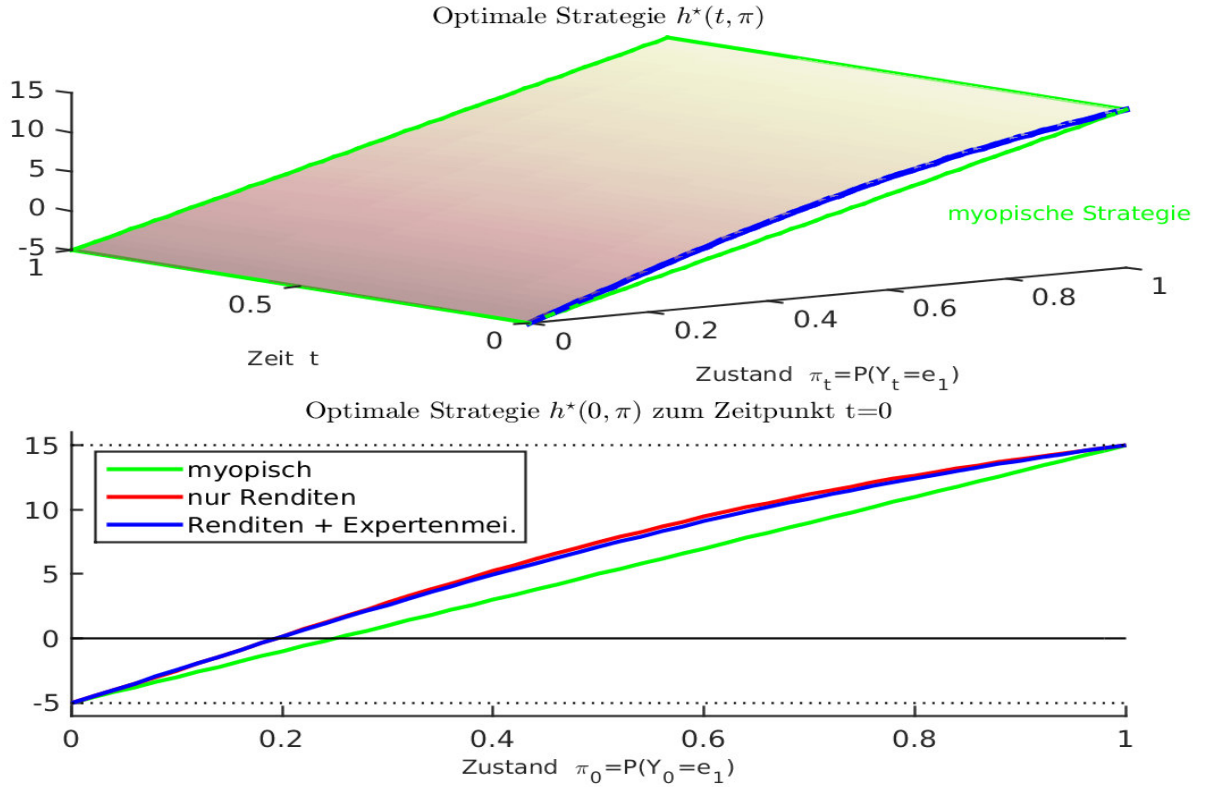


Abbildung 5.3:

OBEN: Optimale Strategie  $h^*(t, \pi)$  und myopische Strategie  $h_{myop}^*(t, \pi)$

UNTEN: Optimale Strategie  $h^*(0, \pi)$  für Investor mit Zugang zu Expertenmeinungen, optimale Strategie für Investor ohne Zugang zu Expertenmeinungen, d.h.  $\lambda = 0$  und myopische Strategie  $h_{myop}^*(0, \pi)$

Obige Abbildung zeigt sehr anschaulich, dass die optimale Strategie an den Rändern mit der myopischen Strategie zusammenfällt und somit die Eigenschaften *i)* und *ii)* zur Geltung kommen. Das verwendete Differenzenverfahren besteht somit den oben angesprochenen Plausibilitätstest. An dieser Stelle überzeugen wir uns entsprechend Satz 3.2 sowie Bemerkung 2.2 davon, dass die optimalen Strategien im Fall  $\theta \rightarrow 0$  gegen die myopische Strategie konvergieren.

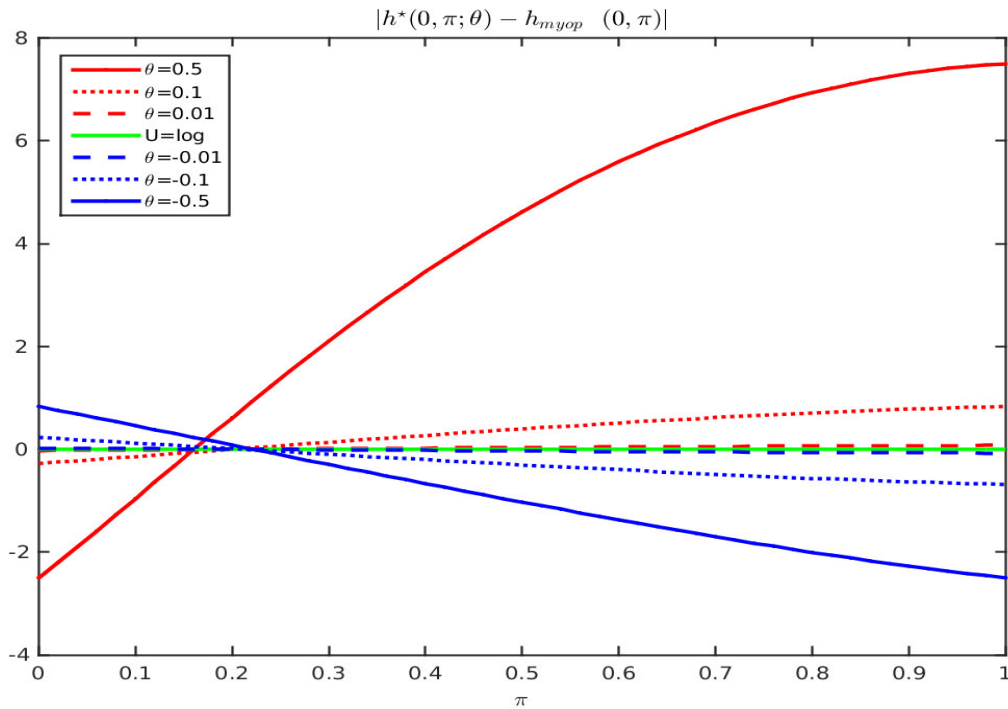


Abbildung 5.4:

Konvergenz der optimalen Strategien  $h^*(0, \pi)$  gegen myopische Strategie für  $\theta \rightarrow 0$ .

Damit besteht das verwendete (explizite) Differenzenschema auch den Plausibilitätstest (iii), wie wir in obiger Abbildung sehen können.

## 5.2 Gegenüberstellung verschiedener numerischer Verfahren

Wir veranschaulichen für den Modellfall aus Paragraph 4.1 zum Parametersatz gemäß Tabelle 5.1 die im Kapitel 4 beschriebenen numerischen Verfahren zur Berechnung der optimalen Strategie und Wertfunktion:

- Finite Differenzenverfahren, vgl. Paragraph 4.2



- Policy-Improvement, vgl. Paragraph 4.3
- Numerik des regularisierten Problems, vgl. Paragraph 4.4

### 5.2.1 Differenzenverfahren für das unregularisierte Problem

Beginnen wir mit der Gegenüberstellung zweier in der Praxis häufig verwendeter  $\Theta$ -gewichteter Differenzenverfahren. Unter  $V^{Exp}$  verstehen wir die vermöge der Transformation (4.17) erhaltene numerische Lösung der DPE (4.18) für das explizite Differenzenverfahren ( $\Theta = 0$ ). Analog verstehen wir unter  $V^{CR}$  die entsprechende numerische Lösung im Fall  $\Theta = 1/2$ , d.h. des Crank-Nicolson-Verfahrens, welches als bewährtes Differenzenverfahren für eine große Klasse von Differentialgleichungen gilt. Für numerische Berechnungen mit dem expliziten Differenzenverfahren bedarf es entsprechend der Schrittweitenrestriktion (4.43) für den verwendeten Parametersatz aus Tabelle 5.1 für Ortsschrittweiten

$$\delta_\pi > 0.31076$$

keiner Restriktion an die Zeitschrittweiten. Dies ist gemessen an dem zu diskretisierenden Intervall  $\mathcal{S} = [0, 1]$  eine sehr grobe Diskretisierung. Zu grobe, aber noch zulässige Ortsdiskretisierungen von  $[0, 1]$  garantieren zwar die Funktionsfähigkeit des expliziten Differenzenschemas, führen allerdings zu unbefriedigenden Genauigkeiten der numerischen Näherungslösung der DPE (4.18). Aus diesem Grund haben wir uns entschlossen entsprechend Tabelle 5.2

$\delta_\pi$	$\delta_\tau$	max. Zeitschrittweite $\delta_\tau$
0.02	0.001	0.0015088
0.01	0.0002	0.0003883
0.005	0.00005	0.0000985

Tabelle 5.2: Verwendete Schrittweitenpaare

deutlich feinere Ortsschrittweiten  $\delta_\pi$  zu verwenden, welche entsprechende Restriktionen an die Zeitschrittweiten verlangen. Desweiteren gibt Tabelle 5.2 die entsprechend der Konvergenzbedingung (4.45) zu  $\delta_\pi$  maximal zulässige, als auch die tatsächlich verwendete Zeitschrittweite  $\delta_\tau$  an. Die folgende Abbildung zeigt für die in Tabelle 5.2 gegebenen Schrittweiten  $(\delta_\pi, \delta_\tau)$  die Resultate der jeweiligen Differenzenverfahren:

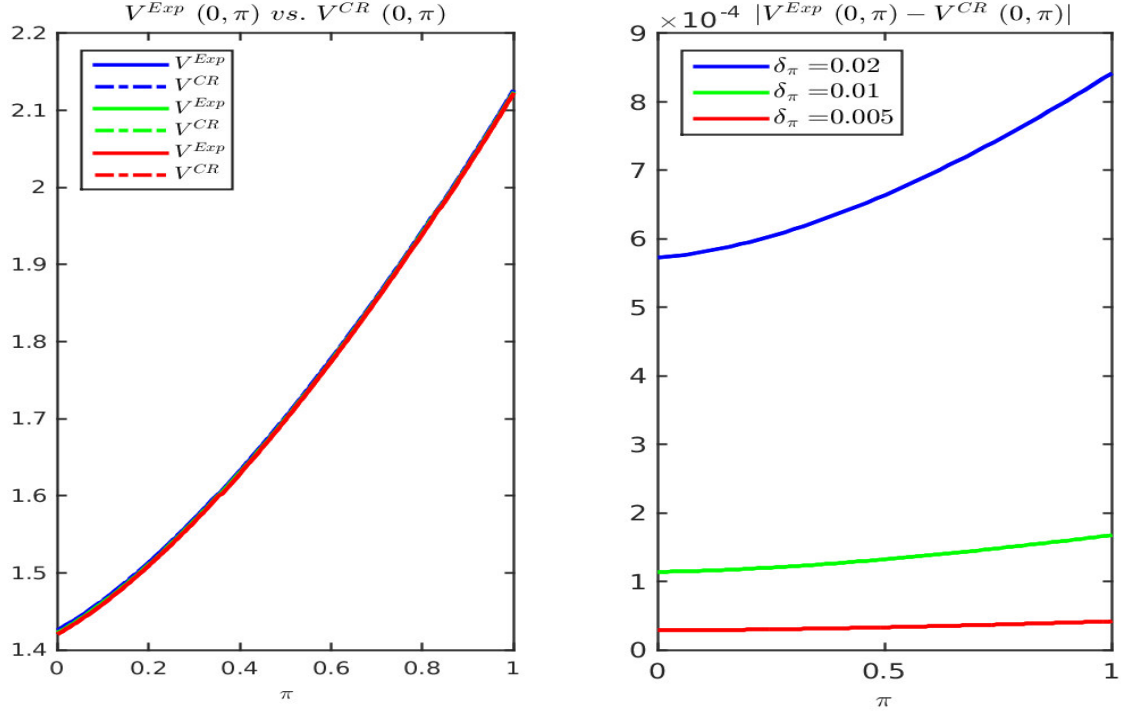


Abbildung 5.5:

Wertfunktionen  $V$  zu Schrittweitenpaare  $(\delta_\pi, \delta_\tau)$  aus Tabelle, Diskretisierung jeweils explizit bzw. semi-implizit ( $\Theta = 1/2$ )

Zunächst bemerken wir, dass sich für feste Schrittweiten die numerischen Lösungen  $V^{Exp}$  und  $V^{CR}$  nur marginal unterscheiden. Da wir in Satz 4.15 bewiesen haben, dass die Lösungen für das explizite Verfahren mit kleiner werdenden Schrittweiten  $(\delta_\tau, \delta_\pi)$  gegen die exakte Lösung der zugrunde liegenden DPE konvergieren, kann man feststellen, dass beide Verfahren die gesuchte exakte Lösung vergleichbar gut approximieren. Während beide Verfahren für den zugrunde liegenden Parametersatz eine vergleichbare Genauigkeit aufweisen, unterscheiden sie sich hinsichtlich ihrer Rechenzeit. Sei  $K_{Exp}^{CR}$  der Quotient aus Rechenzeit des Crank-Nicolson-Verfahrens und Rechenzeit des expliziten Verfahrens, dann zeigen die Berechnungen zu den Schrittweiten aus Tabelle 5.2 folgendes Phänomen:

$\delta_\pi$	$K_{Exp}^{CR}$
0.02	2.15
0.01	1.65
0.005	1.86

Somit ist die Rechenzeit, bei für beide Verfahren identische Schrittweitenpaare, für das semi-implizite Verfahren im Mittel etwa doppelt so groß wie die des expliziten Verfahrens. Dieser Umstand ist in der Tatsache begründet, dass im Differenzenschema des semi-impliziten

Verfahrens in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Ganz analog, die aus  $V^{Exp}$  und  $V^{CR}$  berechneten Kandidaten für die mit (4.15) ermittelte optimale Strategie  $h^*$ :

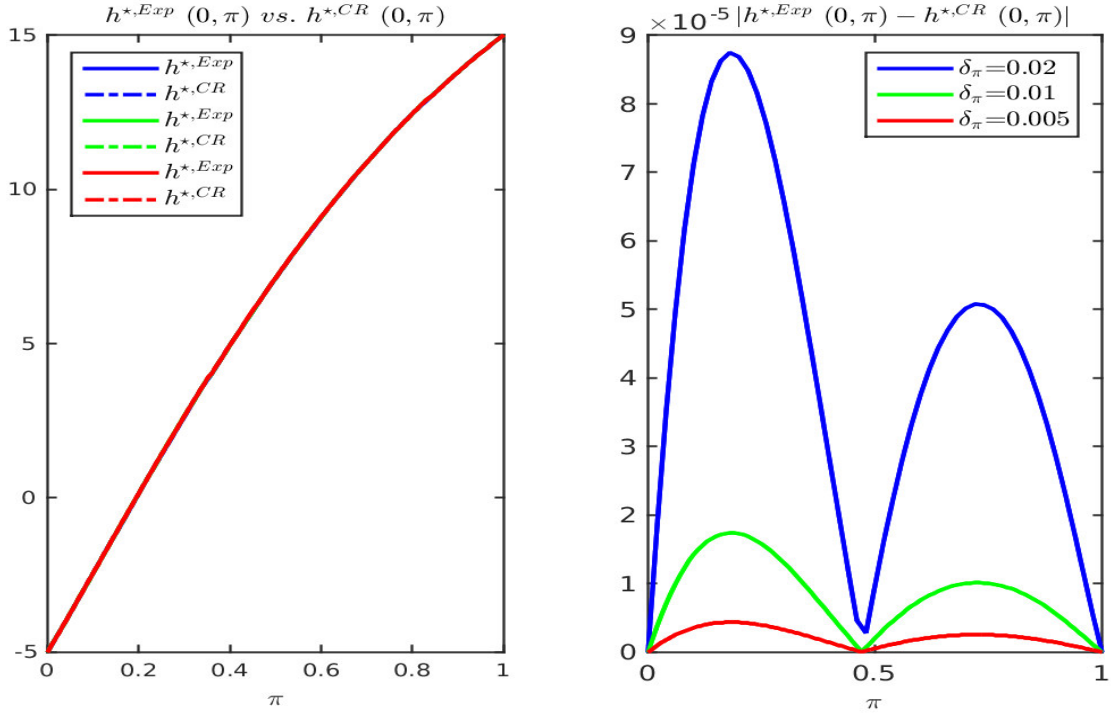


Abbildung 5.6:

Kandidaten für optimalen Strategien  $h^*$  für verschiedene Schrittweiten  $(\delta_\pi, \delta_\tau)$

Es fällt auf, dass sich die berechneten Strategien  $h^*$  trotz unterschiedlicher Schrittweiten kaum unterscheiden. Eine Erklärung für diesen Sachverhalt ist, dass die Kandidaten für die optimalen Strategien gemäß (4.15) wesentlich durch die Ableitung  $\partial_\pi V(0, \pi)$  determiniert sind. Da sich gemäß Abbildung 5.5 die Form der einzelnen Kurven kaum ändert deutet dies auf eine unter Verringerung der Schrittweite nahezu (numerisch) invariante Ableitung hin. Entsprechend gering fallen die Korrekturen in der Strategie aus. Das semi-implizite Differenzenverfahren zum Parameter  $\Theta = 1/2$  besitzt jedoch einen Vorteil gegenüber dem Expliziten. Während man beim expliziten Verfahren sich an die Schrittweitensteuerung für  $\delta_\pi, \delta_\tau$  und  $\delta_z$  gemäß (4.45) und (4.46) halten muss, vermuten wir im Fall des semi-impliziten Verfahrens für fixiertes  $\delta_\pi$  größere Freiheiten in der Wahl der Zeitschrittweite  $\delta_\tau$ . Diese Vermutung wird in der Folge durch numerische Experimente bestätigt. Zunächst sei in folgender Abbildung die Schrittweitenrestriktion an  $\delta_\pi$  und  $\delta_\tau$  ausgewiesen: Entscheiden wir uns beispielsweise für eine Ortschrittweite  $\delta_\pi$ , so ist die maximal zulässige Zeitschrittweite  $\delta_\tau$  in (4.45) aus Satz 4.15 gegeben. Folgende Abbildung veranschaulicht zu verschiedenen Ortschrittweite  $\delta_\pi$  die maximal zulässigen Zeitschrittweiten  $\delta_\tau$ :

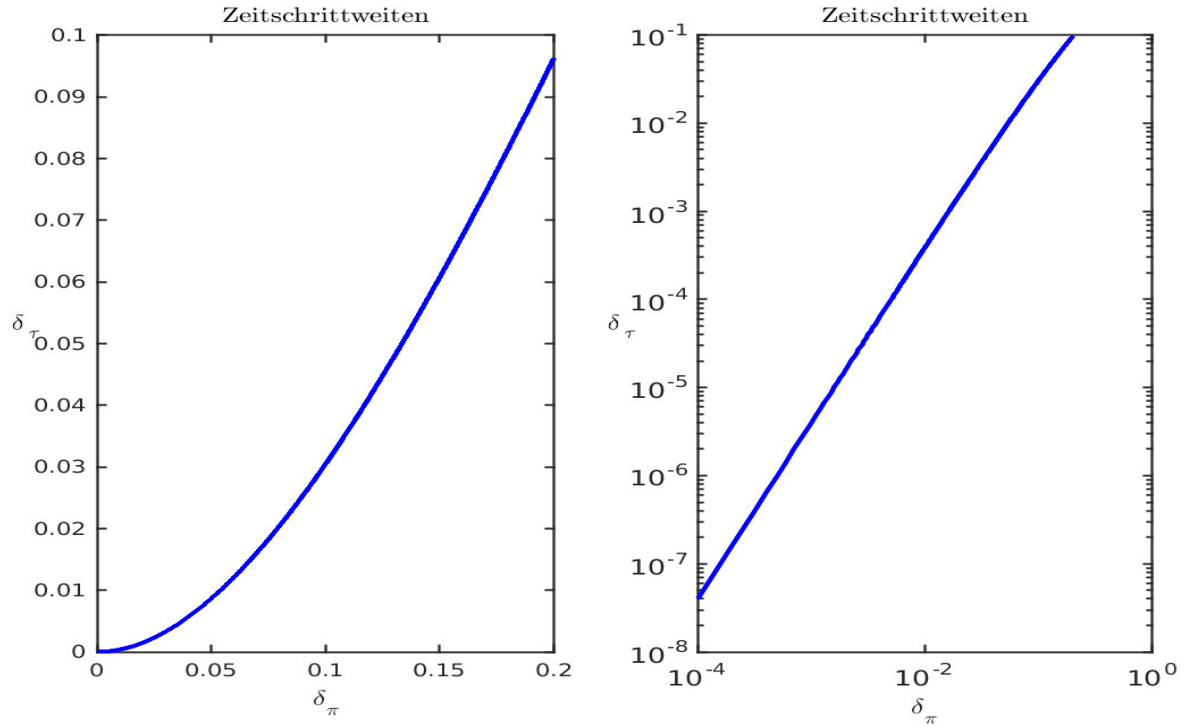


Abbildung 5.7:

LINKS: Maximal zulässige Zeitschrittweiten  $\delta_t$  zu vorgegebenen  $\delta_\pi$  gemäß Konvergenzbedingung (4.45)

RECHTS: Doppellogarithmische Darstellung der maximal zulässigen Zeitschrittweiten aus dem linken Bild

Das rechte Bild in Abbildung 5.7 legt den Schluss nahe, dass die Abhängigkeit  $\delta_t = \delta_t(\delta_\pi)$  der maximal zulässigen Zeitschrittweite von der Ortsschrittweite  $\delta_\pi$  näherungsweise durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann, da der Graph in der doppellogarithmischen Darstellung annähernd eine Gerade mit Anstieg  $\approx 2$  ist.

Sehen wir uns an was passiert, wenn wir zu beispielsweise vorgeschriebener Ortsschrittweite  $\delta_\pi = 0.02$  die maximal noch zulässige Zeitschrittweite

$$\delta_\tau = 0.0015088 \quad (5.1)$$

ausreizen bzw. diese sogar verletzen.

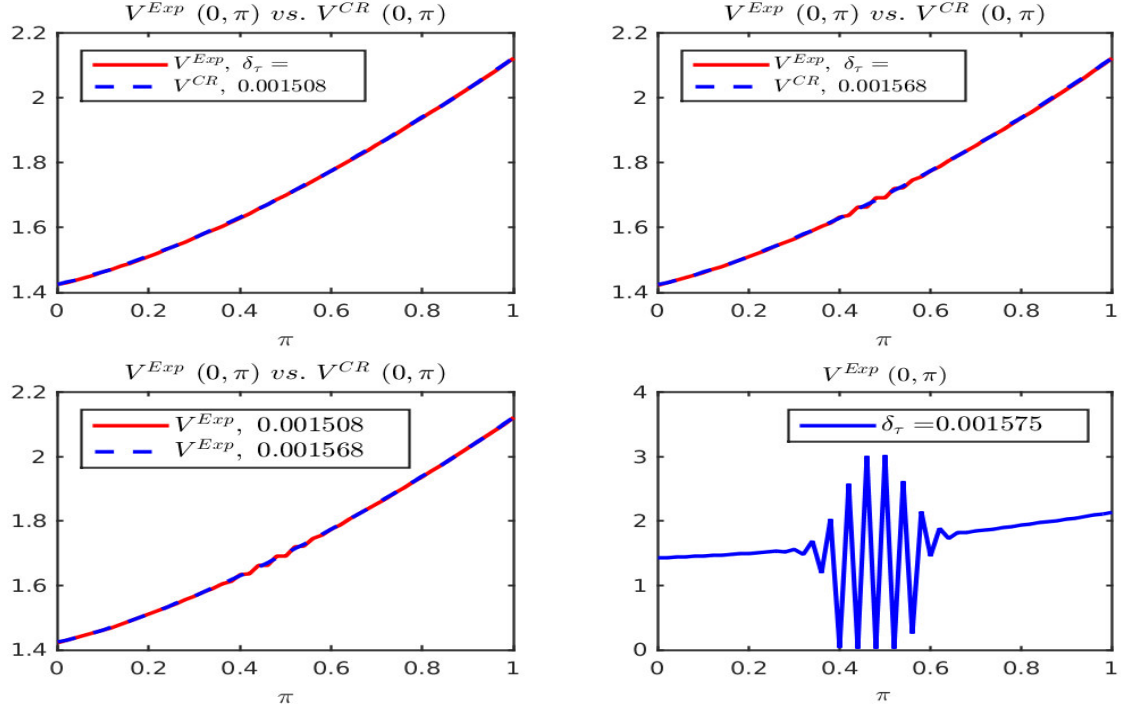


Abbildung 5.8:

 LINKS OBEN:  $V^{Exp}$  und  $V^{CR}$  bei zulässiger Zeitschrittweite

 RECHTS OBEN:  $V^{Exp}$  und  $V^{CR}$  bei Überschreitung der zulässigen Zeitschrittweite

 LINKS UNTEN:  $V^{Exp}$  bei zulässiger und unzulässiger Zeitschrittweite

 RECHTS UNTEN:  $V^{Exp}$  bei marginaler Verletzung der zulässigen Zeitschrittweite

Abbildung 5.8 zeigt, dass beide Verfahren zu vorgeschriebener Ortsschrittweite  $\delta_\pi = 0.02$  und gerade noch zulässiger Zeitschrittweite  $\delta_\tau = 0.001508$  plausible Ergebnisse liefern, wohin bei Verletzung der Restriktion an  $\delta_\tau$  das explizite Verfahren zu oszillieren beginnt, das semi-implizite Verfahren ( $\Theta = 1/2$ ) jedoch noch funktioniert. Die Abbildung zeigt, dass schon bei geringfügiger Überschreitung der maximal erlaubten Zeitschrittweite  $\delta_\tau$  das explizite Verfahren völlig zusammenbricht. Dies wirft die Frage auf, inwieweit man bei Verwendung des semi-impliziten Verfahrens zum Parameter  $\Theta = 1/2$  die Restriktion (5.1) verletzen kann, ohne dessen Funktionsfähigkeit zu verlieren. Dabei messen wir die Güte der erhaltenen Lösung an der Näherungslösung  $V^{Exp}$  zu den Schrittweiten  $(\delta_\pi, \delta_\tau) = (0.02, 0.001508)$ , welche wir zum Zwecke der Vergleichbarkeit als exakte Lösung ansehen. Die folgende Abbildung liefert diesbezüglich eine kleine Studie:

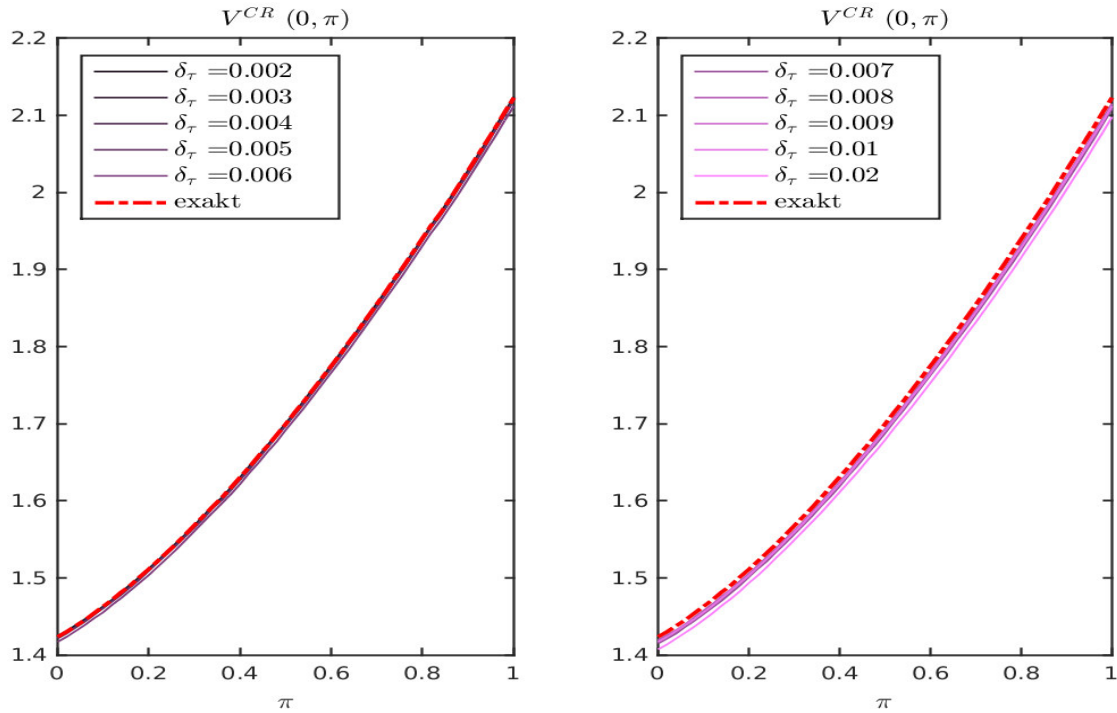


Abbildung 5.9:

LINKS:  $V^{CR}$  bei geringer Überschreitung der maximal erlaubten Zeitschrittweite  
 RECHTS:  $V^{CR}$  bei größeren Zeitschrittweiten

Die Abbildung 5.9 macht deutlich, dass geringe Überschreitungen der (für das explizite Verfahren) maximal zulässigen Zeitschrittweite, die Funktionsfähigkeit des Crank-Nicolson Verfahrens nicht beeinträchtigen. Wir stellen fest, dass das Crank-Nicolson Verfahren eine im Vergleich mit der für das explizite Verfahren scharfen Restriktion an  $\delta_\tau$  gemäß (5.1), eine um rund 4-fach größere Zeitschrittweite  $\delta_\tau = 0.006$  toleriert und plausible Ergebnisse liefert. Darüberhinaus sind in der folgenden Tabelle

$\delta_\tau$	$K_{Exp}^{CR}$
0.002	1.23
0.003	0.84
0.004	0.62
0.005	0.51
0.006	0.44

die Rechenzeitquotienten  $K_{Exp}^{CR}$  aufgeführt. Dieser entsteht in diesem Fall aus dem Quotienten aus der Rechenzeit zur Ermittlung von  $V^{CR}$  für fixiertes  $\delta_\pi = 0.02$  und  $\delta_\tau$  aus obiger Tabelle und der Rechenzeit zur Bestimmung von  $V^{Exp}$  zum fixierten Schrittweitenpaar  $(\delta_\pi, \delta_\tau) = (0.02, 0.001508)$ . Wir stellen auf diese Weise experimentell fest, dass in diesem

Experiment die benötigte Rechenzeit linear mit  $\delta_\tau$  fällt. Vergrößert man wie im linken Bild von Abbildung 5.9 die Zeitschrittweite  $\delta_\tau$  weiter, dann beobachtet man folgendes:

- Die numerischen Näherungslösungen  $V^{CR}$  behalten Ihre Form im Vergleich zu den Kurven im linken Bild der Abbildung
- Wir beobachten eine Verschiebung der Kurven  $V^{CR}$  weg von der als exakt angesehenen Lösung.

Nun kommen wir zu einer weiteren Eigenschaft der Differenzenschemata: die Konvergenzordnung. Wie wir mit (4.48) in Satz 4.15 bewiesen haben, konvergiert das explizite Differenzenschema linear gegen die exakte Lösung. Dies können wir auch numerisch beobachten. Zu diesem Zweck berechnen wir für ausgewählte Schrittweitenpaare

$\delta_\pi$	$\delta_\tau$
0.04	0.00001
0.02	0.00001
0.01	0.00001
0.005	0.00001
0.0025	0.00001

Tabelle 5.3:

die numerischen Lösungen  $V^{Exp}$ . In Ermangelung der exakten Lösung  $V$  fassen wir die numerische Lösung zum Schrittweitenpaar  $(\delta_\pi, \delta_\tau) = (0.0025, 0.00001)$  als exakte Lösung  $V$  der PIDE (4.18) auf, um die Güte der durch gröbere Diskretisierung erhaltenen numerischen Näherungslösungen  $V^{Exp}$  daran zu messen. Schließlich haben wir den in (4.24) betrachteten maximalen Fehler

$$\|e^m\| = \max_{j=1, \dots, n_\pi} \{|V_j^{EXP, m} - V(\tau_m, \pi_j)|\}$$

für  $m = n_\tau$  ermittelt. Damit berechnen wir die Maximumsnorm des Fehlers lediglich im letzten Zeitschritt  $n_\tau$  des Differenzenschemas, da gemäß (4.48) aus Satz (4.24) das explizite Differenzenschema in jedem Zeitschritt linear in  $\pi$  konvergiert. Folgende Abbildung bestätigt die lineare Konvergenz des expliziten Differenzenschemas:

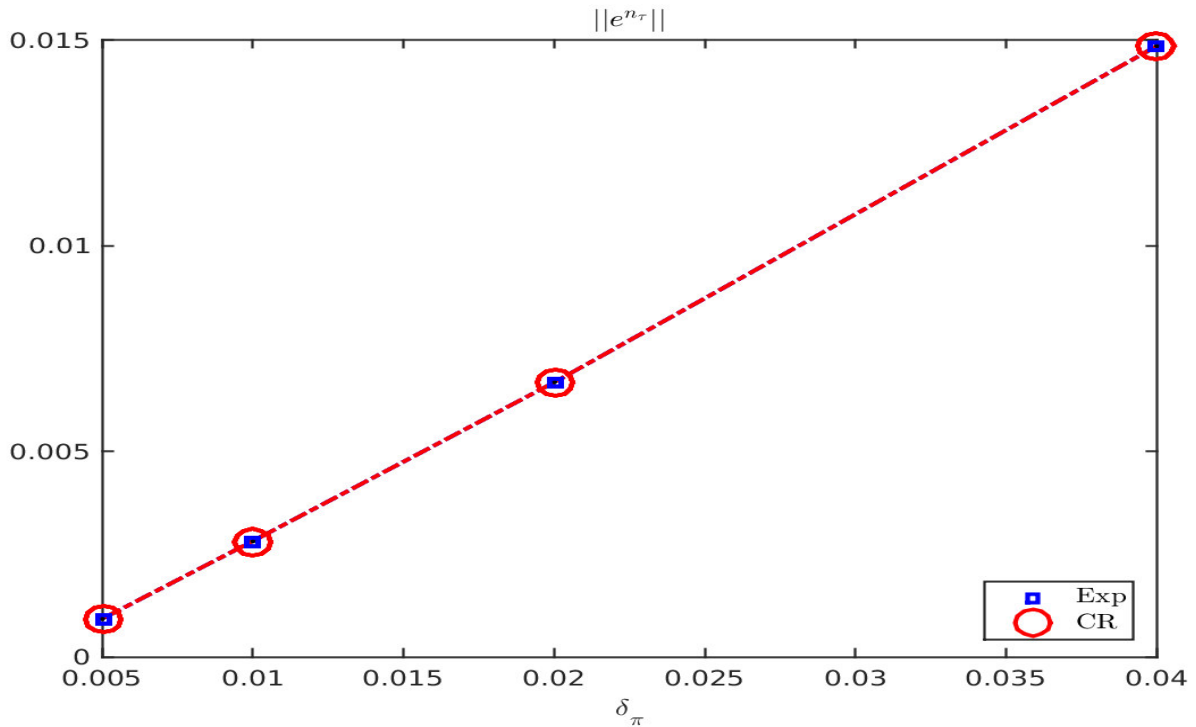


Abbildung 5.10: lineare Konvergenz des expliziten Differenzenschemas

Abbildung 5.10 bestätigt die lineare Konvergenz des expliziten Differenzenschemas. Mit jeder Halbierung der Ortsschrittweite  $\delta_{\pi}$  halbiert sich auch die betragsmäßige punktweise Differenz der Lösung  $V^{Exp}$  zu der als exakt angesehenen Kurve. Damit haben wir die in Satz 4.15 bewiesene Konvergenzaussage für das explizite Verfahren numerisch nachvollzogen. Darüberhinaus zeigt obige Abbildung auch die lineare Konvergenz des Crank-Nicolson Verfahrens für den verwendeten Parametersatz in Tabelle 5.1.

### 5.2.2 Policy-Improvement

Nun möchten wir uns mit den numerischen Resultaten der in Kapitel 4.3 vorgestellten Policy-Improvement Methode zur Lösung des Nutzenmaximierungsproblems 2.14 befassen. Ausgangspunkt ist analog den soeben betrachteten Differenzenschemata der Parametersatz aus Tabelle 5.1. Wie wir in Kapitel 4.3 gesehen haben, existieren für die Berechnung der Folgen  $\{v^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$  und  $\{h^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$  verschiedene Zugänge. Wir haben diese Folgen einerseits durch numerisches Lösen von Folgen von PIDE Gleichungen der Gestalt (4.59) erzeugt, andererseits haben wir analog [17] jeweils die erste Iterierte  $v^{(1)}$  und  $h^{(1)}$  durch eine Monte-Carlo-Simulation erhalten. Zu diesem Zweck bezeichnen wir im Folgenden mit  $v_{Exp}^{(k)}$  und  $h_{Exp}^{(k)}$  die jeweiligen Iterierten, welche durch Verwendung expliziter Differenzenschemata, vgl. Kapitel 4.3.3 berechnet wurden und analog  $v_{MC}^{(1)}$  und  $h_{MC}^{(1)}$ , sofern die erste Iterierte



aus einer Monte-Carlo-Simulation gemäß Kapitel 4.3.2 hervorgegangen sind.

Zunächst vergleichen wir unter Verwendung der Schrittweitensteuerung

$$(\delta_\pi, \delta_\tau) = (0.02, 0.0001)$$

die Iterierten  $v_{Exp}^{(k)}$  und  $h_{Exp}^{(k)}$  mit den Näherungen  $V^{Exp}$  und  $h_{Exp}^*$  der exakten Lösung  $V$  der DPE (4.18) bzw  $h^*$  des Nutzenmaximierungsproblems 2.14:

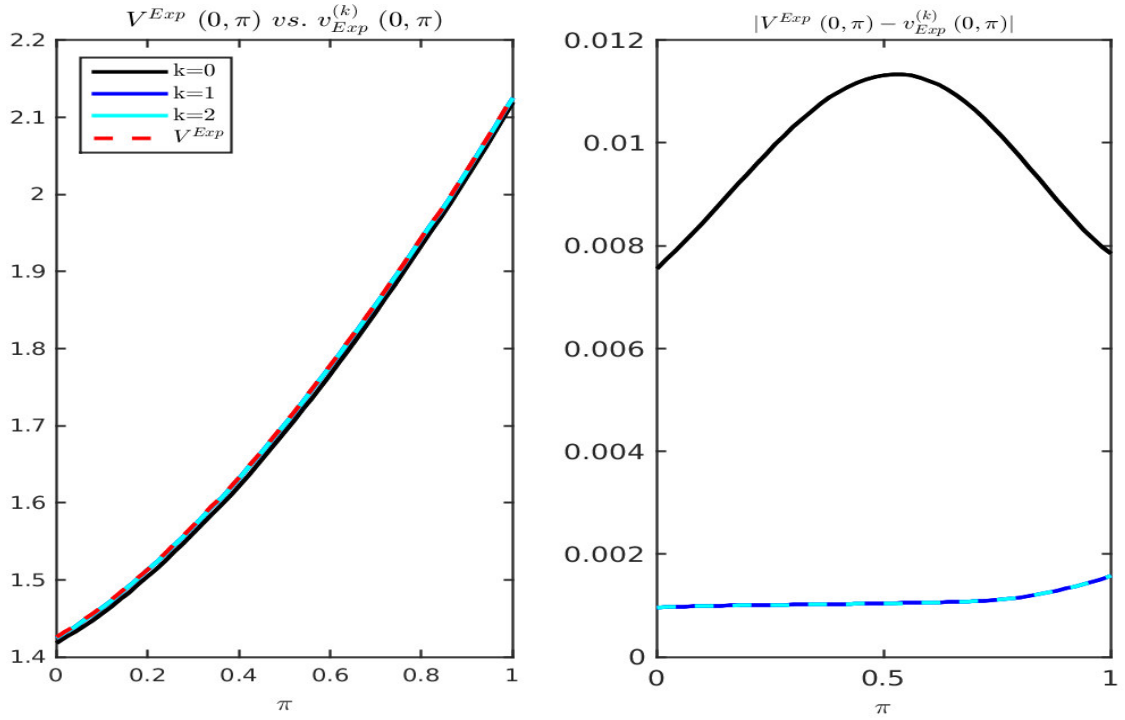


Abbildung 5.11:

LINKS: Gegenüberstellung der durch explizite Differenzenschemata berechneten Iterierten  $v_{Exp}^{(k)}$  und der Approximation  $V^{Exp}$  der Wertfunktion

RECHTS: Absolute Abweichung zwischen den Iterierten  $v_{Exp}^{(k)}$  und der Approximation  $V^{Exp}$  der Wertfunktion

Die Abbildung 5.11 legt den Schluss nahe, dass das Policy-Improvement-Verfahren sehr schnell konvergiert. Insgesamt sind ausgehend von einer Startstrategie  $h^{(0)} := h_{myop}$  lediglich zwei Iterationsschritte nötig bis sich die Iterierten  $v^{(1)}$  und  $v^{(2)}$  punktweise nur marginal unterscheiden. Da die für die Berechnung der Iterierten  $v^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  zu lösenden PIDE (4.60) im Integralteil etwas einfacher zu diskretisieren ist, als die zu lösende DPE (4.18) bei der Berechnung von  $V^{Exp}$ , sowie wegen der kleinen Zahl von notwendigen Iterationen, stellt Policy-Improvement eine sinnvolle Alternative zur Approximation der

Wertfunktion  $V$  dar. Ganz ähnlich verhält es sich mit den aus den Iterierten  $v^{(k)}$  berechneten Strategien  $h^{(k)}$  wie folgende Abbildung nahelegt:

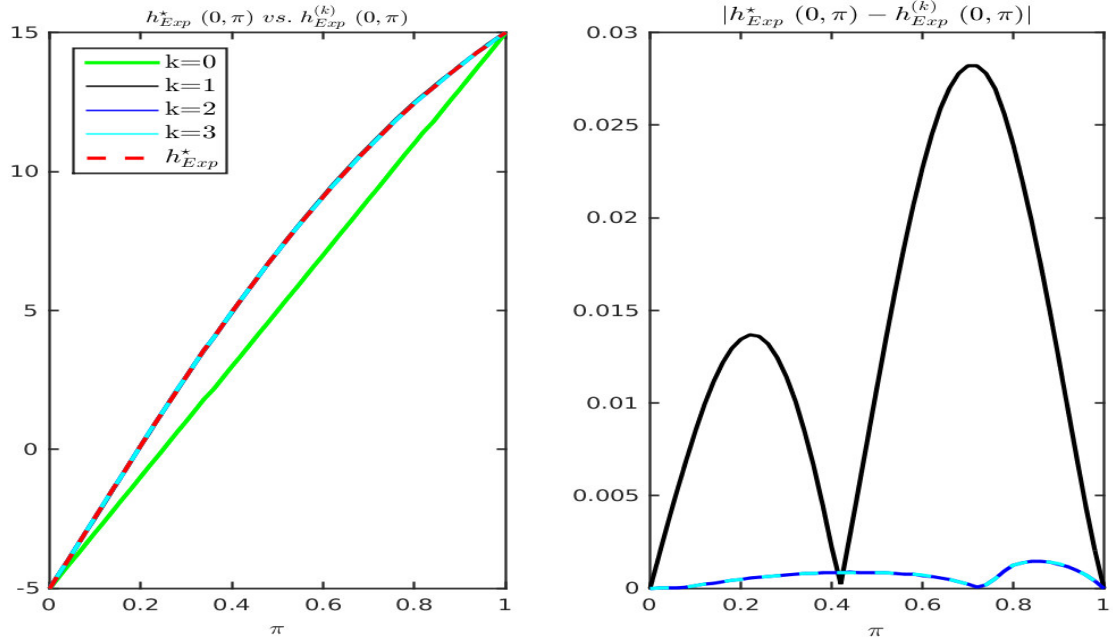


Abbildung 5.12:

LINKS: Gegenüberstellung der aus  $v_{Exp}^{(k)}$  berechneten Iterierten  $h^{(k)}$  sowie der Approximation  $h_{Exp}^*$  des Kandidaten für die optimalen Strategie

RECHTS: Punktweise Abweichung zwischen den Iterierten  $h_{Exp}^{(k)}$  und  $h_{Exp}^*$

Während wir unter Verwendung finiter Differenzen mehrere Iterierte  $v^{(k)}$  berechnen konnten, gelingt dies mit der Monte-Carlo-Methode gemäß Bemerkung 4.19 aus Gründen des numerischen Aufwandes schon nicht mehr. Es gelingt allenfalls ausgehend von einer Startstrategie ( hier:  $h^{(0)} := h_{myop}$  ) die Berechnung der ersten Iterierten  $v^{(1)}$ . Aus diesem Grund möchten wir einmal für den Parametersatz aus Tabelle 5.1 und verschiedene  $\lambda$  die ersten Iterierten  $v^{(1)}$  des Policy-Improvement Algorithmus gegenüberstellen. Dabei verwenden wir einerseits finite Differenzen, andererseits die Monte-Carlo Methode und stellen beide Iterierten  $v_{Exp}^{(1)}$  und  $v_{MC}^{(1)}$  in folgender Abbildung gegenüber:

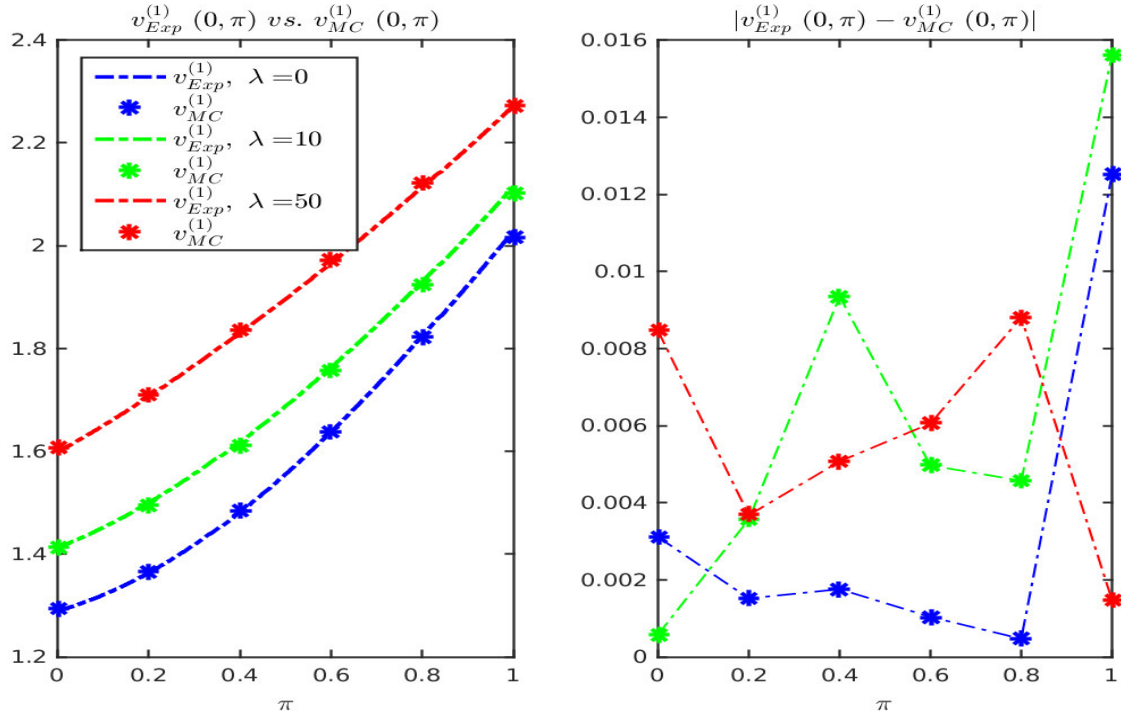


Abbildung 5.13:

LINKS: Vergleich der ersten Iterierten  $v_{Exp}^{(1)}$  und  $v_{MC}^{(1)}$  für verschiedene  $\lambda$  zum Parametersatz aus Tabelle 5.1 und Monte-Carlo-Simulation mit 5000 Lösungspfaden der stochastischen Differentialgleichung (4.55) und  $n_t = 1500$  Zeitschritten

RECHTS: Fehlerplot zwischen den ersten Iterierten

Wir sehen in Abbildung 5.13, dass die ersten Iterierten nur marginal voneinander abweichen. Dies ist ein sehr erfreuliches Resultat, weil es zeigt, dass unabhängig von der gewählten Methode die Berechnung der ersten Iterierten  $v^{(1)}$  jeweils auf annähernd das gleiche Ergebnis führt. Beide Vorgehensweisen, finite Differenzen und die Monte-Carlo-Simulation, unterscheiden sich grundsätzlich voneinander. Während bei ersterer Variante die erste Iterierte durch numerisches Lösen der PIDE (4.59) entstanden ist, haben wir im Fall der Monte-Carlo-Simulation die erste Iterierte durch die Berechnung des Erwartungswertes (4.49) erhalten. Daher stellt das in Abbildung 5.13 veranschaulichte Experiment einen starken und vertrauensschaffenden Test für die Güte beider Vorgehensweisen dar.

### 5.2.3 Differenzenverfahren für das regularisierte Problem

Nun möchten wir die numerischen Resultate zur Numerik des regularisierten Problems ( $RegP$ ) := ((4.62), (3.54), (3.55)) aus Kapitel 3.3.2 betrachten, welches wir auf die numerische Lösung der DPE (4.64) reduzieren konnten. Wir legen dabei abermals den

Parametersatz aus Tabelle 5.1 zugrunde. Wegen Annahme 3.11 existieren Konstanten  $C_1$ , und  $C_2$  mit  $C_1 \leq f_k(z) \leq C_2$ , so dass zu vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  mit

$$\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} = \frac{C_1}{C_2}$$

geeignete Abschneideparameter  $\kappa > 0$  sowie Parameter  $\tilde{\mu}_i \in \mathbb{R}$  und  $\tilde{\varrho}_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  ermitteln werden müssen, so dass das nichtlineare Gleichungssystem (4.70)

$$\begin{aligned} \Upsilon^E(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i) &= \mu_i \\ \Upsilon^V(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_i, \tilde{\varrho}_i) &= \varrho_i^2 \end{aligned}$$

und simultan die Ungleichung (4.71)

$$N\delta_\pi < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} \quad (5.2)$$

erfüllt ist. Die Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems kann nur numerisch erfolgen. Durch die Besonderheit des in Tabelle 5.1 vorgeschlagenen Parametersatzes mit übereinstimmenden Varianzen  $\varrho_1^2 = \varrho_2^2 = \varrho^2$ , können wir die (numerische) Lösung dieses Gleichungssystems durch die folgenden Punkte vereinfachen:

- (i) Anstatt des in (4.3) vorgeschlagenen Definitionsbereichs mit von  $\tilde{\varrho}_i$ ,  $i = 1, 2$  abhängigen Endpunkten  $l$  und  $u$ , begrenzen wir den Definitionsbereich  $\mathcal{Z} = [l, u]$  gemäß  $l = l(\kappa) = M_0 - \kappa\varrho$  und  $u = u(\kappa) = M_0 + \kappa\varrho$ . Dies hat zur Folge, dass die Variablen  $\tilde{\varrho}_i$  des Gleichungssystems lediglich in den Funktionen  $\Upsilon^E$  und  $\Upsilon^V$  und nicht auch noch im Definitionsbereich  $\mathcal{Z}$  erscheinen.
- (ii) Unter Verwendung der Funktionen

$$F_i(x, m) = \Upsilon^E(l, u, m, x) - \mu_i = m + \frac{\varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})}x - \mu_i$$

mit

$$\bar{l}(x, m) = \frac{l - m}{x}, \quad \text{und} \quad \bar{u}(x, m) = \frac{u - m}{x}$$

zeigen wir nachfolgend, dass die Lösungen  $m = \tilde{\mu}_i$  der Gleichungen  $F_i(\varrho, m) = 0$  eine Symmetrieeigenschaft bezüglich  $M_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  erfüllen und es gilt

$$M_0 = \frac{1}{2}(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2).$$

Damit kann man aus der Kenntnis von einem  $\tilde{\mu}_i$  auf das andere schließen und somit die Lösung des Gleichungssystems (4.70) vereinfachen. Zum Beweis der Symmetrieeigenschaft verwenden wir

$$\begin{aligned} \bar{l}(x, 2M_0 - m) &= \frac{-\kappa\varrho + M_0 - (2M_0 - m)}{x} = -\frac{\kappa\varrho + M_0 - m}{x} = -\bar{u}(x, m) \\ \bar{u}(x, 2M_0 - m) &= \frac{\kappa\varrho + M_0 - (2M_0 - m)}{x} = -\frac{-\kappa\varrho + M_0 - m}{x} = -\bar{l}(x, m), \end{aligned}$$

sowie  $\mu_2 = 2M_0 - \mu_1$  und  $\Phi(-r) = 1 - \Phi(r)$  und erhalten

$$\begin{aligned}
 F_2(x, 2M_0 - m) &:= \Upsilon^E(x, 2M_0 - m) - \mu_2 \\
 &= m + \frac{\varphi(\bar{l}(x, 2M_0 - m)) - \varphi(\bar{u}(x, 2M_0 - m))}{\Phi(\bar{u}(x, 2M_0 - m)) - \varphi(\bar{l}(x, 2M_0 - m))} - \mu_2 \\
 &= -m - \frac{\varphi(\bar{l}(x, m)) - \varphi(\bar{u}(x, m))}{\Phi(\bar{u}(x, m)) - \varphi(\bar{l}(x, m))} + \mu_1 \\
 &= -(\Upsilon^E(x, m) - \mu_1) \\
 &= -F_1(x, m).
 \end{aligned}$$

Sei  $m := \tilde{\mu}_1$  eine Lösung der Gleichung  $F_1(x, m) = 0$  bzw.  $\Upsilon^E(l, u, \tilde{\mu}_1, x) = \mu_1$ , dann ist wegen obiger Rechnung auch  $\tilde{\mu}_2 := 2M_0 - \tilde{\mu}_1$  Lösung der Gleichung  $F_2(x, 2M_0 - \tilde{\mu}_1) = 0$  bzw.  $\Upsilon^E(l, u, \tilde{\mu}_2, x) = \mu_2$ . Damit ergibt sich die Symmetrie der  $\tilde{\mu}_i$ ,  $i = 1, 2$  bezüglich  $M_0$ :

$$M_0 = \frac{1}{2}(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2).$$

Weiterhin führt eine analoge Überlegung bezogen auf die Funktionen

$$G_i(x, m) := \Upsilon^V(l, u, m, x) - \varrho_i^2, \quad i = 1, 2$$

unter der Prämisse  $\varrho = \varrho_1 = \varrho_2$  auf die Identität

$$G_2(x, 2M_0 - m) = G_2(x, m) = G_1(x, m). \quad (5.3)$$

Damit reduziert sich das nichtlineare Gleichungssystem (4.70) mit vier Gleichungen, auf die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
 \Upsilon^E(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}_1) &= \mu_1 \\
 \Upsilon^V(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}_1) &= \varrho^2
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit lediglich zwei Gleichungen und liefert übereinstimmende Lösungen  $\tilde{\varrho}_1 = \tilde{\varrho}_2 =: \tilde{\varrho}$ : Sei  $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}^2)$  Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (5.4), dann ist nach (5.3) auch  $(\tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}^2) = (2M_0 - \tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}^2)$  Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
 \Upsilon^E(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}) &= \mu_2 \\
 \Upsilon^V(l(\kappa), u(\kappa), \tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}) &= \varrho^2.
 \end{aligned}$$

Somit bedarf es lediglich der (numerischen) Lösung des Gleichungssystems (5.4). Es zeigt sich, dass das Gleichungssystem (5.4) für zu kleine Werte des Abschneideparameters  $\kappa$  keine Lösung besitzt. Abbildung 5.14 zeigt die Abhängigkeit von  $\bar{\varepsilon} = \frac{C_1}{C_2}$  von  $\kappa$  und für zwei ausgewählte  $\kappa$  die zugehörigen Dichten der abgeschnittenen Normalverteilungen

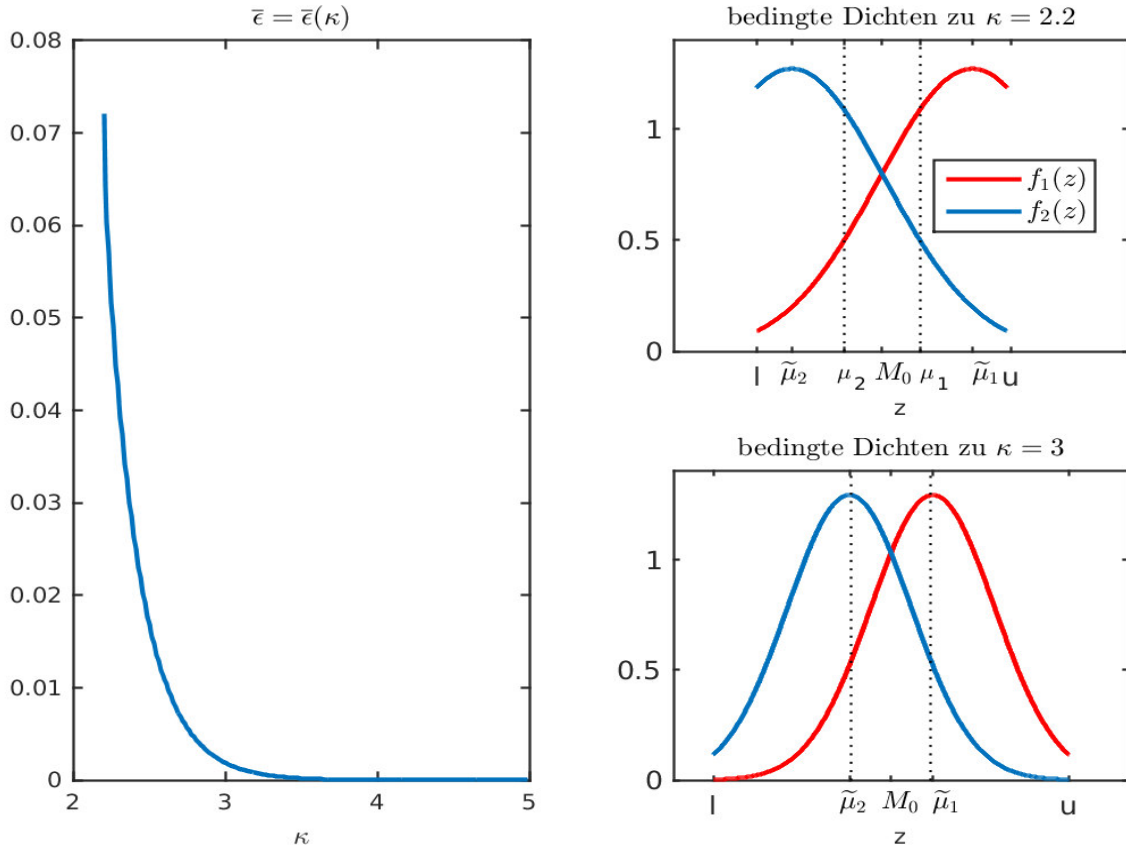


Abbildung 5.14:

LINKS: Graphische Darstellung von  $\bar{\varepsilon} = \frac{C_1}{C_2}$  mit  $C_1 \leq f_i(z) \leq C_2$ ,  $i = 1, 2$  in Abhängigkeit von  $\kappa$  (vgl. (3.50))

RECHTS: Bedingte Dichten  $f_i(z)$  mit den Parametern  $(\tilde{\mu}_i, \varrho^2)$ ,  $i = 1, 2$  zu  $\kappa = 2.2$  bzw.  $\kappa = 3$

Während man für die Modellierung der Expertenmeinungen durch abgeschnittene Normalverteilungen den Abschneideparameter möglichst groß wählen möchte, sind dieser Wahl im Falle der numerischen Lösungen der DPE (4.64) mit einem Differenzenverfahren Grenzen gesetzt. Wählen wir z.B.  $\kappa$  so, dass  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\kappa)$  kleiner als die (bezogen auf die Leistungsfähigkeit des Rechners) kleinst mögliche Ortsdiskretisierung  $\delta_\pi$  ist, können wir das Problem dann nicht mehr numerisch lösen. Betrachten wir beispielsweise die bedingten Dichten zu  $\kappa = 3$ , so ermittelt man für den zugehörigen Dichtequotienten  $\varepsilon = 0.0019$ . Hat man zur Lösung der DPE (4.64) beispielsweise  $N = 10$  Diskretisierungspunkte im Teilintervall  $[-\varepsilon, 0]$  vorgesehen, muß man bereits mit einer Schrittweitensteuerung  $(\delta_\tau, \delta_\pi) = (1.44 \times 10^{-7}, 1.9 \times 10^{-4})$  gemäß (4.45) arbeiten. Dies sind sehr kleine Schrittweiten, was sehr lange Rechenlaufzeiten impliziert. Wir haben uns daher in der vorliegenden Abhandlung für das Paar

$$(\kappa, \varepsilon) = (2.2, 0.0721) \quad (5.5)$$

entschieden. Dieses Paar ist das Wertepaar mit dem größten  $\bar{\varepsilon}$ , zu welchem die zugehörigen Parameter

$$\begin{aligned}(\tilde{\mu}_1, \tilde{\varrho}_1) &= (0.578, 0.4962) \\(\tilde{\mu}_2, \tilde{\varrho}_2) &= (-0.378, 0.4962)\end{aligned}$$

eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems liefern. Damit setzen wir sämtliche Koeffizientenfunktionen der DPE (3.57) auf das Intervall  $\mathcal{S}_\varepsilon = [-\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  mit  $\varepsilon$  aus (5.5) fort, und überführen die DPE (3.57) in PIDE (4.64). Letztere wurde im Hauptteil des Differentialoperators (3.56) mit  $m \in \{150, 200, 300, 400, 800\}$  regularisiert. Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.4.2 diskretisieren wir Gleichung (4.64) auf dem abgeschnittenen Definitionsbereich  $[-0.3, 1.3]$  und erhalten die in Abbildung 5.17 gezeigten numerischen Lösungen  $V^m$  des regularisierten Problems.

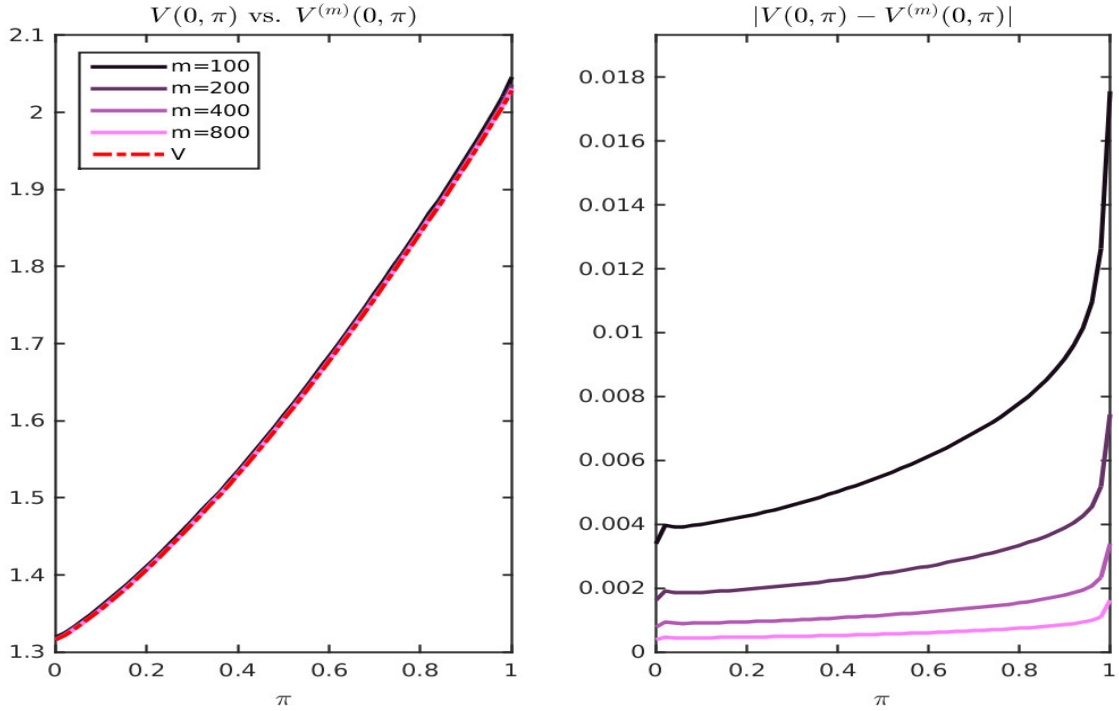


Abbildung 5.15:

LINKS: Numerische Näherungslösungen  $V^m$  des regularisierten Problems (RegP) und Wertfunktion  $V$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $\pi \in [0, 1]$ .

RECHTS: Punktweise Abweichung zwischen  $V^m$  und  $V$

und dessen zugehörige  $\varepsilon$ -optimalen Strategien  ${}^m h^*$ :

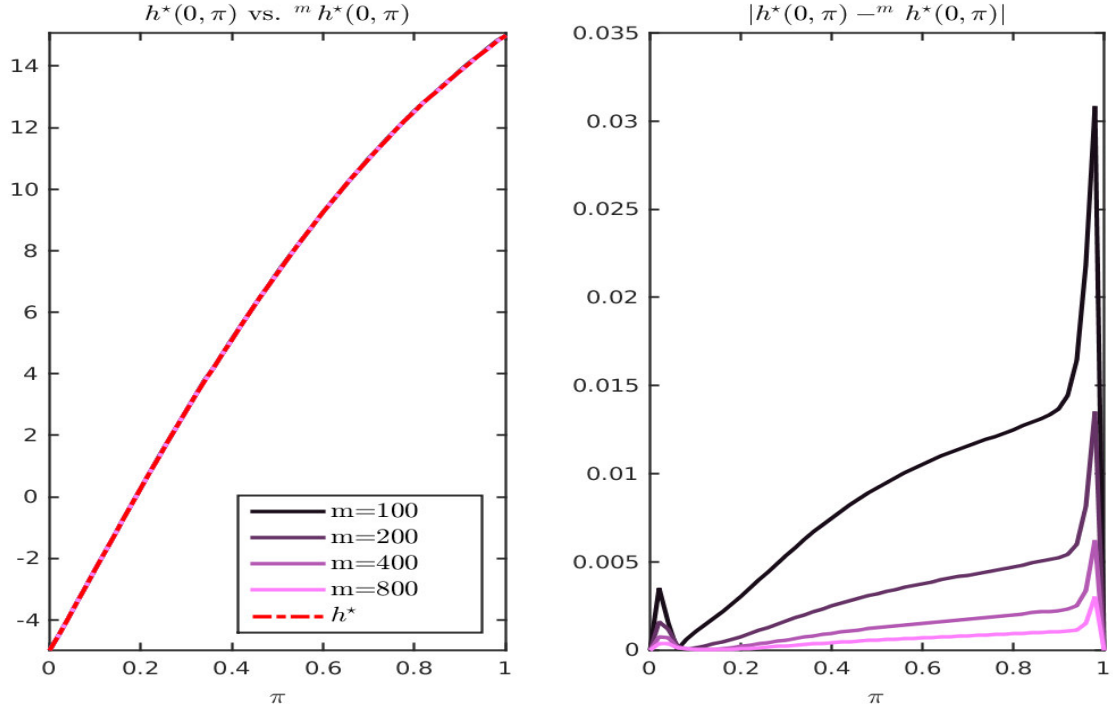


Abbildung 5.16:

 LINKS: Strategien  ${}^m h^*$  und optimale Strategie  $h^*$ .

 RECHTS: Punktweise Abweichung zwischen  ${}^m h^*$  und  $h^*$ 

Es fällt auf, dass die numerischen Näherungslösungen  $V^m$  des regularisierten Problems (RegP) aus Abbildung 5.15 an den Rändern größere Abweichungen zeigen, und sich dieses Verhalten auf die Strategien  ${}^m h^*$  aus Abbildung 5.17 infolge der Abhängigkeit der Strategien von der Ableitung  $\partial_\pi V^m$  überträgt. Das Ausbrechen der Strategien an den Rändern erklärt sich dadurch, dass die Koeffizientenfunktionen (4.65), (4.66) und (4.67) der DPE (4.64) auf  $\mathcal{S}_\varepsilon \setminus [0, 1]$  stetig auf Null fortgesetzt werden, und sich dadurch auf  $[\pi_a, \pi_b] \setminus [0, 1]$  die Gleichung ändert. Während wir im Fall der Wertfunktion  $V$  am Rand des Intervalls  $[0, 1]$  die Gleichung (4.18) diskretisiert haben, haben wir bei der numerischen Berechnung der  $V^m$  am Rand des Intervalls  $[0, 1]$  bereits die regularisierte Gleichung (4.64) diskretisiert. Die zugehörigen numerischen Schemata unterscheiden sich somit auf dem Rand des Intervalls  $[0, 1]$  und die numerischen Randeffekte aus Abbildung 5.15 sind Ausdruck dieses Umstandes. Aus diesem Grund zeigen wir in folgender Abbildung auch noch die numerische Näherungslösung der DPE (4.64) auf dem Intervall  $[\pi_a, \pi_b] \supset \mathcal{S}_\varepsilon$ :



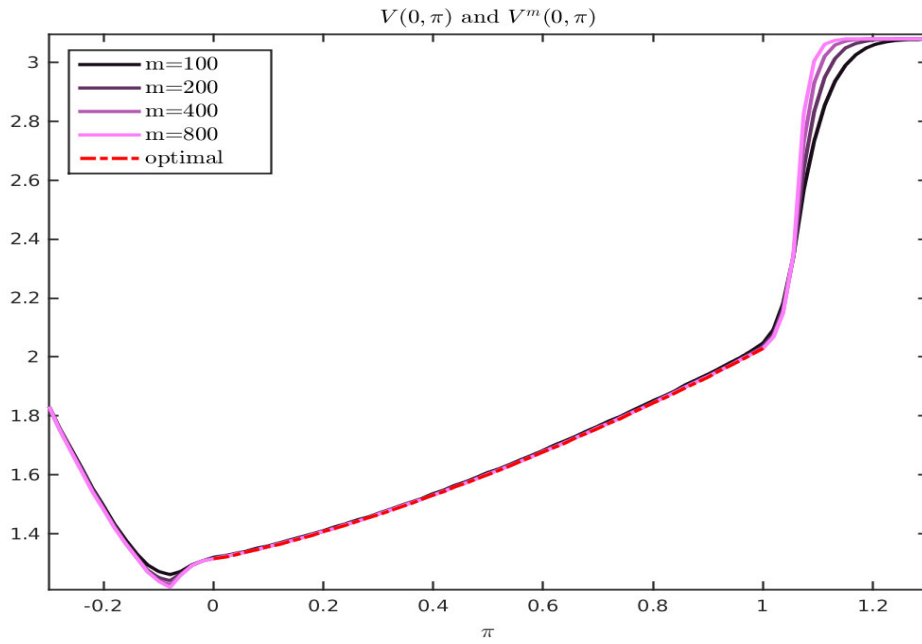


Abbildung 5.17:

LINKS: Numerischen Näherungslösungen  $V^m$  des regularisierten Problems (RegP) und der Wertfunktion  $V$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $\pi \in [\pi_a, \pi_b]$

RECHTS: Strategien  ${}^m h^*$  und optimale Strategie  $h^*$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $\pi \in [\pi_a, \pi_b]$

Nun möchten wir demonstrieren, dass die in Abbildung 5.17 geplotteten Strategien  ${}^m h^*$  tatsächlich im Sinne von Satz 3.14  $\varepsilon$ -optimal sind:

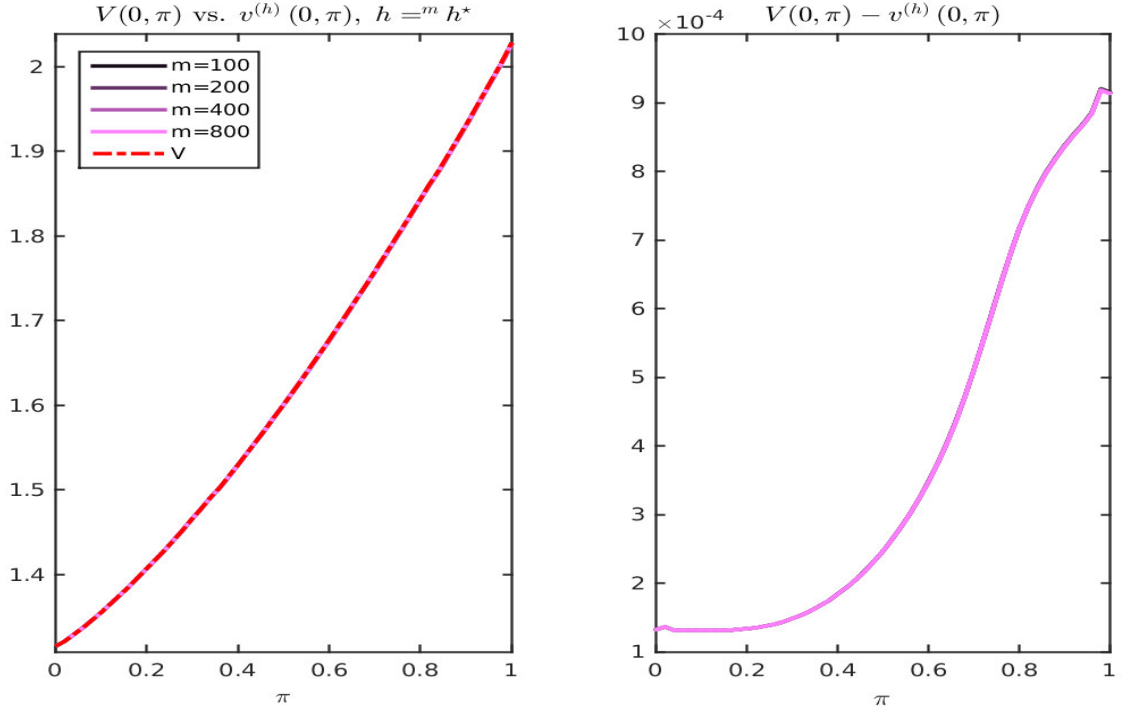


Abbildung 5.18:

 LINKS: Zielfunktion  $v^m = v^{(h)}$  gemäß (3.54) ausgehend von  $h = {}^m h^*$ 

 RECHTS: Annäherung der Zielfunktion  $v^m$  von Wertfunktion  $V$ .

Die Abbildung zeigt sehr deutlich, dass sich für sehr kleine Störterme die Strategien kaum voneinander unterscheiden und man sehr gute Approximationen für die optimale Strategie erhält.

### 5.3 Monetärer Wert der Expertenmeinungen

In den vorigen Kapiteln haben wir das Nutzenmaximierungsproblem (2.14) zu einem auf die Investorfiltration  $\mathbb{F}$ , vgl. (2.10), projizierten stochastischen Steuerungsproblem (3.29)

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \{E(U(X_T^{(h)}))\} = \begin{cases} \frac{x_0^\theta}{\theta} \sup_{h \in \mathcal{H}} \left\{ E \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \tilde{\pi}_0, h)}, h_s) ds \right\} \right) \right\} & : \quad \theta \in (0, 1) \\ \frac{x_0^\theta}{\theta} \inf_{h \in \mathcal{H}} \left\{ E \left( \exp \left\{ - \int_0^T \tilde{b}(\Pi_s^{(0, \tilde{\pi}_0, h)}, h_s) ds \right\} \right) \right\} & : \quad \theta < 0 \end{cases}.$$

reduziert. Im Modellfall haben wir gezeigt, dass sich dieses Steuerungsproblem auf die Behandlung des unregularisierten Problems

$$(UnRegP) = \{(4.6), (4.13), (4.14)\}$$

zurückführen läßt. Unter Verwendung von

$$V(t, \pi) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \{v(t, \pi, h)\}, \text{ mit } v(t, \pi, h) = E \left( \exp \left\{ - \int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{(t, \pi, h)}, h_s) ds \right\} \right).$$

und  $\tilde{b}(\pi, h)$  gemäß (4.12) sowie der Transformation  $V(t, \pi) = G^{1-\theta}(t, \pi)$  kann man den gesuchten Erwartungswert formal in die Gestalt

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \{E(U(X_T^{(h)}))\} = \frac{x_0^\theta}{\theta} G^{1-\theta}(0, \pi), \quad \theta \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$$

bringen. Ziel dieses Paragraphen ist es nun, den monetären Wert der Expertenmeinung zu quantifizieren. Zu diesen Zweck betrachten wir drei unterschiedliche Investoren, und versehen diese jeweils mit dem Attribut  $\mathcal{I}$ , mit  $\mathcal{I} \in \{R, C, F\}$ , welches die dem Investor zugängliche Information charakterisiert. Speziell verstehen wir unter dem R-Investor, einen Investor der seine optimale Handelstrategie ausschließlich unter Verwendung der Renditen  $R$  berechnet. Der C-Investor hat neben den Renditen auch Zugang zu den Expertenmeinungen und als F-Investor bezeichnen wir den vollinformierten Investor, d.h. denjenigen, der die Drift  $\mu_t$  kennt. Dieser F-Investor geht auch als Grenzfall des C-Investors für  $\lambda \rightarrow \infty$  hervor. Entsprechend dieser Konventionen verstehen wir unter  $x_0^R$  das Anfangskapital, welches der R-Investor zu Beginn seines Investitionszeitraumes (zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) benötigt, um den gleichen maximalen mittleren Nutzen zu erzielen wie der C-Investor zum Anfangskapital  $x_0^C = 1$ . Eine kleinere Rechnung durch Gegenüberstellung  $E[U(X_T^C)] = E[U(X_0^R)]$  ergibt

$$x_0^R = \left( \frac{V^C(0, \pi)}{V^R(0, \pi)} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (5.6)$$

Ersetzt man in (5.6) das Attribut C durch F, besagt obige Formel das der R-Investor das  $x_0^R$ -fache des Anfangskapitals des F-Investor benötigt um den denselben maximalen mittleren Nutzen zu erzielen wie der F-Investor mit  $x_0^F = 1$ . Unter  $V^{\mathcal{I}}$  für  $\mathcal{I} \in \{R, C\}$  verstehen wir nun die Wertfunktion des oben zitierten Problems ( $UnRegP$ ), welchem entweder ein C-Investor oder ein R-Investor zugrunde liegt. Während sich  $V^{\mathcal{I}}$  für  $\mathcal{I} \in \{R, C\}$  im Modellfall durch numerisches Lösen der PIDE (4.18) ergibt, finden wir für  $V^F$  im Paper [3] von Bäuerle und Rieder, im Paragraph C, in Gestalt von Theorem 3 eine Möglichkeit der Berechnung, welches wir an dieser Stelle sinngemäß als Satz zitieren:

**Satz 5.1.** *Gegeben sei auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, P)$ , mit  $\mathbb{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{t \in [0, T]}$  ein Finanzmarkt, bestehend aus einem Bond mit Preisprozess  $dS_t^0 = r(Y_t)B_t dt$  und einem risikobehaftetem Wertpapier, welches dem Preisprozess*

$$dS_t = \mu(Y_t)S_t dt + \sigma(Y_t)S_t dW_t$$

folgt, mit dem Wiener Prozess  $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$  und der Markovkette  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  mit endlichem Zustandsraum  $\{e_1, \dots, e_d\}$  und Generator  $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ . Weiterhin sei  $\sigma(Y_t) \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$ . Dann berechnet sich für

$$h \in \mathcal{H} := \left\{ h : [t, T] \rightarrow \mathbb{R} : h - \mathbb{F}\text{-adaptiert, } \int_t^T h_s^2 ds < \infty \text{ f.s.} \right\}$$

das Nutzenmaximierungsproblem

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} E \left( U(X_T^h) \mid X_0^h = x, Y_0 = e_i \right)$$

mit der Potenznutzenfunktion  $U$  aus Definition 2.1 die Wertfunktion

$$\tilde{V}(t, x, i) = \sup_{x \in \mathcal{H}} E(U(X_T^h) \mid X_t^h = x, Y_t = e_i) \quad (5.7)$$

gemäß

$$\tilde{V}(t, x, i) = \frac{1}{\theta} x^\theta g_i(t). \quad (5.8)$$

Dabei ist mit  $\mu_i := \mu(Y_t = e_i)$ ,  $r_i = r(Y_t = e_i)$  und  $\sigma_i$  die Funktion  $g_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, d$  eindeutige Lösung folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\partial_t g_i(t) + k_i g_i(t) + \sum_{j \in \{1, \dots, d\}} q_{ij} [g_j(t) - g_i(t)] = 0, \quad g_i(T) = 1 \quad (5.9)$$

und

$$k_i := r_i \theta + \frac{1}{2} \frac{\theta}{1 - \theta} \left( \frac{\mu_i - r_i}{\sigma_i} \right)^2.$$

Schließlich können wir zwischen der Wertfunktion  $V$  unsers Modellfalls aus Paragraph 4.1 und der Wertfunktion  $\tilde{V}$  aus oben zitiertem Satz 5.1 folgenden Zusammenhang herstellen:

$$V(t, 0) = \tilde{V}(t, 2) \quad \text{sowie} \quad V(t, 1) = \tilde{V}(t, 1).$$

Dieser Zusammenhang bietet uns eine Möglichkeit die Wertfunktion  $V(t, \pi)$  im Fall vollständiger Information an den Stellen  $\pi \in \{0, 1\}$  zu berechnen. Hierfür müssen wir lediglich das Differentialgleichungssystem (5.9) lösen: Mit  $r = 0$  und  $\sigma_i = \sigma_R$ ,  $i = 1, 2$  und dem Generator  $Q$  aus (4.1) berechnen wir

$$k_i = \frac{1}{2} \frac{\theta}{1 - \theta} \frac{\mu_i^2}{\sigma_R^2}, \quad i = 1, 2.$$

Das homogene Differentialgleichungssystem (5.9)

$$\begin{aligned} \partial_t g_1(t) + k_1 g_1(t) + q_1(g_2(t) - g_1(t)) &= 0, & g_1(T) &= 1 \\ \partial_t g_2(t) + k_2 g_2(t) + q_2(g_1(t) - g_2(t)) &= 0, & g_2(T) &= 1 \end{aligned}$$

bzw. mit  $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^{\top}$  in Matrixschreibweise

$$\partial_t g(t) = Ag(t), \quad g(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} q_1 - k_1 & -q_1 \\ -q_2 & q_2 - k_2 \end{pmatrix},$$

besitzt unter Verwendung der Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{As} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^l s^l, \quad s \in \mathbb{R}$$

nach Satz 4, Kapitel VI, §7 des Lehrbuches [52] die Lösung

$$g(t) = ce^{At}$$

mit dem freien vektorwertigen Parameter  $c \in \mathbb{R}^2$ . Wegen  $g(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ergibt eine kleine Rechnung

$$c = e^{-AT} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit insgesamt

$$g(t) = e^{A(t-T)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Veranschaulichung des obigen Sachverhalts dient anhand der Parameter von Tabelle 5.1 folgende Abbildung:

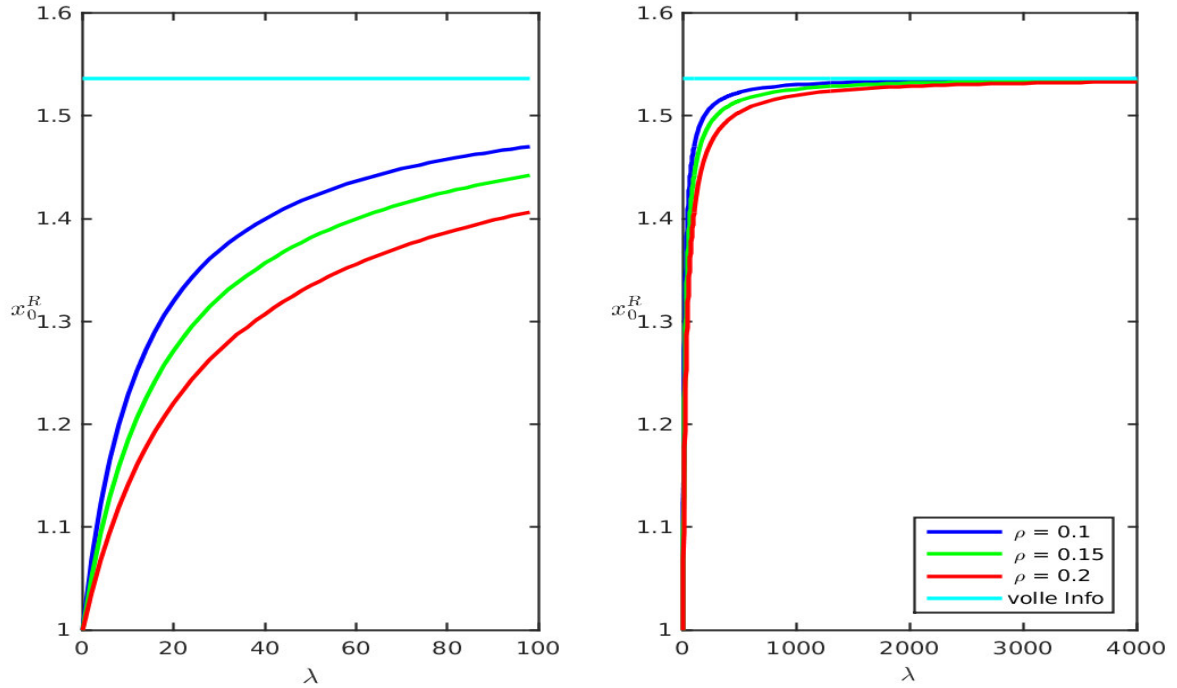


Abbildung 5.19:

Notwendiges Anfangskapital  $x_0^R$  des R-Investors für  $P(Y_0 = e_1) = 1$ , um im Mittel denselben Nutzen zu erzielen wie der C- bzw. F-Investor

LINKS:  $\lambda \in [0, 100]$

RECHTS:  $\lambda \in [0, 4000]$

## 6 Diffusionsapproximation

Dem Nutzenmaximierungsproblem (2.14) liegt bekanntermaßen ein Experte zugrunde, welcher zu diskreten Zeitpunkten  $T_k \in [0, T]$  Aussagen  $Z_k$  über den (seiner Meinung nach) momentanen Zustand der Drift  $\mu(Y_{T_k})$  tätigt. Diese Aussagen gehen über das Bayes'sche Updating in die Zustandsgleichung (3.28) ein und erscheinen im zugehörigen Generator (3.38) als Integraloperator. Der dort auftretende Integraloperator ist von der Gestalt

$$K[g](\pi) = \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{g(\pi + \gamma(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi) dz. \quad (6.1)$$

Dieser Integraloperator macht die DPE (3.39) zu einer PIDE und erschwert insbesondere für große  $\lambda$  eine numerisch günstige Auswertung dieser Gleichung. Ein in der Mathematik üblicher Gedanke ist nun der Wunsch, ein numerisch sehr aufwendiges diskretes Modell, durch ein numerisch günstiges stetiges Modell zu approximieren. Dementsprechend wird es Ziel dieses Kapitels sein, im Modellfall mit  $n = 1$  Aktienprozessen und  $d = 2$  möglichen Zuständen der Drift  $\mu_t \in \{\mu_1, \mu_2\}$ , den Übergang von einem in diskreter Zeit auftretenden

---

Experten (im Folgenden diskreter Experte genannt) hin zu einem in stetiger Zeit auftretenden Experten (im Folgenden stetiger Experte genannt) zu vollziehen. In unserem Modellfall aus Paragraph 4.1 konnten wir den diskreten Experten stets durch Angabe seiner Parameter  $(\lambda, \kappa, \{(\mu_i, \varrho_i^2): i = 1, 2\})$  charakterisieren. Während  $\mu_i$  die möglichen Driftzustände der zeitstetigen Markovkette  $\mu_t$  sind, handelt es sich bei den Konstanten  $\varrho_i^2 > 0$  um die Varianzen der Signale  $Z_k$  des Experten. Ein Übergang hin zu einem stetigen Experten ist nun grundsätzlich auf zwei Wegen möglich:

- 1.) Da der Parameter  $\lambda$  die Häufigkeit des mittleren Auftretens des diskreten Experten beschreibt, kann man mit  $\lambda \rightarrow \infty$  und  $\varrho_i = \text{const}$  für  $i = 1, 2$  zu einem stetigen Experten kommen. Anschaulich bedeutet dies, dass sich der Experte im Grenzfalle ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) praktisch ständig äußert und Informationen  $Z_k \in \mathcal{Z}$  liefert. Da der Experte so modelliert ist, dass seine Aussagen  $Z_k$  im Mittel um den tatsächlichen Wert der Drift  $\mu(Y_{T_k})$  liegen, handelt es sich im Grenzfalle nach dem Gesetz der Großen Zahlen um den Fall vollständiger Information. Wir hätten dann unser Nutzenmaximierungsproblem (2.14) im Fall vollständiger Information zu lösen, was in der Arbeit von Bäuerle und Rieder [3] bereits erfolgt ist. Bezogen auf unser Modell würde die Zustandsgleichung (4.6) entarten (kein Diffusionsprozess) und dessen Lösung zwischen den Werten 0 und 1 alternieren. Für den Generator würde sich im Grenzfalle  $\lambda \rightarrow \infty$  ein Problem hinsichtlich der Auswertbarkeit des Integralteils

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathcal{Z}} \{g(\pi + \gamma(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi) dz$$

als unbestimmter Ausdruck der Form „ $\infty \cdot 0$ “ ergeben. Zusammenfassend läßt sich sagen, dass im Grenzfalle  $\lambda \rightarrow \infty$  das Nutzenmaximierungsproblem (2.14) unter partieller Information, ein Nutzenmaximierungsproblem unter vollständiger Information wird.

- 2.) Um im Grenzfalle für  $\lambda \rightarrow \infty$  einen zeitstetigen Diffusionsprozess als Modell für einen zeitstetigen Experten zu erhalten, betrachten wir eine durch  $\lambda$  parametrisierte Familie diskreter Experten, welche sich innerhalb des Investitionshorizonts  $[0, T]$  im Mittel mit der Häufigkeit  $\lambda \cdot T$  zu Wort melden. Dabei fordern wir, dass mit wachsendem  $\lambda$  die Aussagen des diskreten Experten immer ungenauer ausfallen. Wir erreichen dies durch von  $\lambda$  abhängige Varianzen  $\varrho_i^2 = \varrho_i^2(\lambda)$ , welche linear in  $\lambda$  wachsen. Der Einfachheit halber wählen wir gleiche Varianzen  $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$  und versehen diese mit dem Symbol  $\varrho_D^2(\lambda)$ . Die Verteilungen der Aussagen  $Z_k^\lambda$  des diskreten Experten seien zu festem  $\sigma_J > 0$  abgeschnittene Normalverteilungen mit Erwartungswerten und Varianzen  $\{(\mu_i, \varrho_D^2(\lambda)): i = 1, 2\}$ , mit der Asymptotik

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \varrho_D^2(\lambda) = \sigma_J^2(1 + w(\kappa)), \quad (6.2)$$

sowie  $\lambda$ -abhängigem Wertebereich  $\mathcal{Z}_\lambda$  mit dem Abschneideparameter  $\kappa$ . Wir werden damit eine Familie durch  $\lambda$  parametrisierter Filtergleichungen der Form (3.12) mit vom

Zustand abhängigen Sprungverteilungen gewinnen. Damit verlassen wir die klassische Theorie, welche in erster Linie Diffusionsapproximationen für Sprungdiffusionen mit i.i.d. verteilten Sprüngen betrachtet. Uns gelingt es allerdings vermöge der in (6.2) vorgeschlagenen Parametrisierung der Varianz, und der oben angesprochenen Familie von Filtergleichungen, ein Beispiel für eine Familie von Sprungdiffusionen  $(\Pi_t^\lambda)_{t \in [0, T]}$  mit vom Zustand  $\Pi^\lambda$  abhängigen Sprüngen anzugeben, deren Generatoren mit wachsendem  $\lambda$  gegen den Generator eines Diffusionsprozesses mit Volatilität

$$\sigma_S = \sqrt{1 + w(\kappa)}\sigma_J \quad (6.3)$$

konvergieren. Dieser im Grenzfall  $\lambda \rightarrow \infty$  erhaltene Diffusionsprozess wird sich als Filter eines stochastischen Prozesses erweisen, welcher eine Interpretation hochfrequenter zeitdiskreter Expertenmeinungen als zeitstetigen Experten zuläßt.

Zunächst werden wir im Folgenden etwas technischen Paragraphen einige Grundlagen schaffen, die man für den Übergang vom diskreten zum stetigen Experten benötigt.

## 6.1 Grenzübergang für den Integraloperator

Zu einem fest gewählten  $\sigma_J > 0$  und  $\kappa > 0$  betrachten wir  $\mathcal{Z}$  gemäß (4.3) als vom Parameter  $\lambda$  abhängigen Parameterbereich. Mit  $M_0 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$  setzen wir daher

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\lambda := [l(\lambda), u(\lambda)] = [M_0 - \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J, M_0 + \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J] \quad (6.4)$$

und betrachten die auf  $\mathcal{Z}_\lambda$  eingeschränkten (aber unnormierten) Normalverteilungsdichten  $\tilde{f}_i(z; \lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , (vgl. (4.2)), welche wir mit den  $\lambda$ -abhängigen Parametern  $(\tilde{\mu}_i(\lambda), \tilde{\varrho}_D^2(\lambda))$  versehen:

$$\tilde{f}_i(z; \lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\varrho}_D(\lambda)} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\varrho}_D^2(\lambda)}(z - \tilde{\mu}_i(\lambda))^2\right). \quad (6.5)$$

Analog zu (4.4) erhalten wir wegen (6.2) von  $\lambda$  abhängige Normierungsfaktoren  $c_i(\lambda)$  und entsprechend zu (4.5) die Dichten der auf  $\mathcal{Z}_\lambda$  gestutzten Normalverteilung:

$$f_i(z; \lambda) := \frac{\tilde{f}_i(z; \lambda)}{c_i(\lambda)} : \quad \mathcal{Z}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2. \quad (6.6)$$

Unter Berücksichtigung von Abschneideeffekten, wie sie bereits in Bemerkung 4.2 des Modellfalls 4.1 diskutiert wurden, stattdessen wir die Dichten (6.6) mit den Parametern  $(\tilde{\mu}_i(\lambda), \tilde{\varrho}_D^2(\lambda))$  so aus, dass

$$E(Z_k) = \mu_i \text{ und } Var(Z_k) = \varrho_D^2(\lambda) \quad (6.7)$$

mit  $\varrho_D(\lambda)$  aus (6.2). In den folgenden Sätzen weisen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Parameter  $\tilde{\mu}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$  nach, so dass bei Wahl von  $\tilde{\varrho}_D(\lambda) = \sqrt{\lambda}\sigma_J$  die Forderung (6.7) zumindest für hinreichend große  $\lambda > 0$  erfüllt ist. Wachsendes  $\lambda$  impliziert somit wachsendes  $\tilde{\varrho}_D^2$  und  $\mathcal{Z}_\lambda$ . Die Beweise dieser Sätze haben wir aus Gründen des Leseflusses im Anhang B aufgeführt.



**Satz 6.1.** Sei  $\lambda > 0$  hinreichend groß,  $\sigma_J > 0$ , und  $\tilde{\varrho}_D(\lambda) = \sqrt{\lambda}\sigma_J$ .

- a) Zu jeder beliebigen Wahl von  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  mit  $\mu_1 > \mu_2$  existiert eindeutig ein  $\tilde{\mu}_i(\lambda)$  mit

$$\Upsilon^E(l(\lambda), u(\lambda), \tilde{\mu}_i(\lambda), \tilde{\varrho}_D(\lambda)) = \mu_i, \quad (6.8)$$

wobei  $\Upsilon^E$  die in Hilfssatz 4.1 definierte Funktion ist. Darüberhinaus sind die  $\tilde{\mu}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$  bezüglich  $M_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  symmetrisch:

$$\tilde{\mu}_1(\lambda) + \tilde{\mu}_2(\lambda) = \mu_1 + \mu_2 = 2M_0. \quad (6.9)$$

- b) Die Funktionen  $\{\tilde{\mu}_i(\lambda)\}_{\lambda>0}$  sind konvergent für  $\lambda \rightarrow \infty$  und es existieren  $g_1 \geq \mu_1$  und  $g_2 \leq \mu_2$ , so dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_i(\lambda) = g_i, \quad i = 1, 2.$$

- c) Für die Grenzwerte  $g_i$  ergeben sich die Darstellungen

$$g_i = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_i(\lambda) = \frac{\mu_i + M_0 w(\kappa)}{1 + w(\kappa)}, \quad \text{mit } w(\kappa) = \frac{2\varphi'(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1}. \quad (6.10)$$

**Bemerkung 6.2.** Für spätere Zwecke notieren wir folgende Beobachtungen: Aus obigem Satz gewinnen wir unmittelbar

$$g_1 - g_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 + w(\kappa)}, \quad (6.11)$$

Nachdem wir mit obigem Satz die Asymptotik der  $\tilde{\mu}_i(\lambda)$  verstanden haben, betrachten wir im kommenden Satz die Varianz  $\varrho_D^2(\lambda)$  des diskreten Experten und deren Asymptotik für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Satz 6.3.** Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 und bei Wahl von  $\tilde{\varrho}_D(\lambda) = \sqrt{\lambda}\sigma_J$  gewinnen wir folgende Asymptotik:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\varrho_D^2(\lambda)}{\lambda} = \sigma_J^2(1 + w(\kappa)) \quad (6.12)$$

mit  $w$  aus (6.10).

Mit den folgenden Hilfsätzen werden wir nun den Grenzübergang für den Integraloperator gemäß (6.1) vorbereiten.

**Hilfssatz 6.4.** Sei  $M_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ . Für die Normierungskoeffizienten

$$c_i(\lambda) = \Phi\left(\frac{M_0 + \kappa\sigma_J\sqrt{\lambda} - \tilde{\mu}_i(\lambda)}{\sigma_J\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{M_0 - \kappa\sigma_J\sqrt{\lambda} - \tilde{\mu}_i(\lambda)}{\sigma_J\sqrt{\lambda}}\right)$$

für  $i = 1, 2$  aus (6.6) und der Symmetrieeigenschaft (6.9) gilt

$$c_1(\lambda) = c_2(\lambda). \quad (6.13)$$

Weiterhin gilt für

$$c_3(\lambda) = \Phi \left( \frac{M_0 + \kappa \sigma_J \sqrt{\lambda} - (2\tilde{\mu}_2(\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda))}{\sigma_J \sqrt{\lambda}} \right) - \Phi \left( \frac{M_0 - \kappa \sigma_J \sqrt{\lambda} - (2\tilde{\mu}_2(\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda))}{\sigma_J \sqrt{\lambda}} \right)$$

und  $w = w(\kappa)$  aus (6.10):

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left( \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} - 1 \right) = \frac{w(\kappa)}{(1 + w(\kappa))^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_J^2}. \quad (6.14)$$

*Beweis:* Siehe Anhang B.

**Hilfssatz 6.5.** Für den Likelihoodquotienten  $L_\lambda: \mathcal{Z}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$L_\lambda(z) := \frac{f_2(z; \lambda)}{f_1(z; \lambda)} \quad (6.15)$$

gilt: Es existiert zu jedem hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  ein  $\hat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\varepsilon)$  so das

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}_\lambda} |L_\lambda(z) - 1| < \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \hat{\lambda}(\varepsilon).$$

*Beweis:* Zunächst betrachten wir den durch  $\lambda$  parametrisierten Quotienten

$$\tilde{L}_\lambda(z) := \frac{\tilde{f}_2(z; \lambda)}{\tilde{f}_1(z; \lambda)} = \exp\{\tilde{w}_\lambda(z)\}: \quad \mathcal{Z}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (6.16)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\lambda(z) &= -\frac{1}{2\lambda\sigma_J^2} [2(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))z + \tilde{\mu}_2^2(\lambda) - \tilde{\mu}_1^2(\lambda)] \\ &= -\frac{(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))}{\lambda\sigma_J^2} (z - M_0) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Mit (6.13) folgt

$$L_\lambda(z) = \frac{f_2(z; \lambda)}{f_1(z; \lambda)} = \frac{\frac{\tilde{f}_2(z; \lambda)}{c_2(\lambda)}}{\frac{\tilde{f}_1(z; \lambda)}{c_1(\lambda)}} = \tilde{L}_\lambda(z) = \exp\{\tilde{w}_\lambda(z)\}.$$

Weiterhin bemerken wir

$$|L_\lambda(z) - 1| < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < L_\lambda(z) < 1 + \varepsilon \iff \ln(1 - \varepsilon) < \tilde{w}_\lambda(z) < \ln(1 + \varepsilon).$$

Findet man nun zu jedem beliebig kleinem  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon$  mit  $\ln(1 + \varepsilon) < \delta$  und  $-\delta < \ln(1 - \varepsilon)$ , dann ist die gleichmäßige Konvergenz von  $L_\lambda(z)$  gegen 1 gezeigt, sofern  $\tilde{w}$  auf  $\mathcal{Z}_\lambda$  gleichmässig gegen 0 konvergiert, d.h. zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\hat{\lambda}$  existiert, so dass

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}_\lambda} |\tilde{w}_\lambda(z)| < \delta \quad \text{für alle } \lambda \geq \hat{\lambda}.$$

Eine elementare Überlegung ergibt, dass  $\varepsilon < 1 - e^{-\delta}$  das gewünschte leistet. Somit genügt es die gleichmässige Konvergenz von  $\tilde{w}$  gegen 0 zu erbringen, was nachfolgend gezeigt wird: Zunächst bemerken wir, dass aus  $\mu_1 > \mu_2$  wegen Satz 6.1 auch  $\tilde{\mu}_1(\lambda) > \tilde{\mu}_2(\lambda)$  folgt. Die Funktion  $\tilde{w}: \mathcal{Z}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist damit monoton fallend. Damit wird  $\tilde{w}$  auf dem Rand von  $\mathcal{Z}_\lambda$  extremal und es gilt

$$\tilde{w}(M_0 + \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J) \leq \tilde{w}(z) \leq \tilde{w}(M_0 - \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J).$$

Damit ist  $|\tilde{w}(z)| \leq \max\{|\tilde{w}(M_0 + \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J)|, |\tilde{w}(M_0 - \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J)|\}$ . Wegen

$$\tilde{w}(M_0 \pm \kappa\sqrt{\lambda}\sigma_J) = \frac{\pm\kappa}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))$$

ist

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}_\lambda} |\tilde{w}_\lambda(z)| = \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))$$

unabhängig von  $z$  und mit Bemerkung 6.2 folgt für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}_\lambda} |\tilde{w}_\lambda(z)| \rightarrow 0.$$

q.e.d.

Unter Verwendung von Hilfssatz 6.5 beweisen wir aus technischen Gründen

**Hilfssatz 6.6.** *Zu jedem hinreichend kleinem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\varepsilon)$  mit*

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}_\lambda} \left| \frac{1}{\pi + (1 - \pi)L_\lambda(z)} - 1 \right| < \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \hat{\lambda}(\varepsilon), \quad \pi \in [0, 1].$$

*Beweis:*

1. Sei  $h_\lambda(\pi, z) := \pi + (1 - \pi)L_\lambda(z)$ . Dann gilt

$$|h_\lambda(\pi, z) - 1| = |\pi + (1 - \pi)L_\lambda(z) - 1| = |1 - \pi||L_\lambda(z) - 1| \leq |L_\lambda(z) - 1|.$$

Somit existiert wegen Hilfssatz 6.5 zu jedem  $0 < \varepsilon < 1$  ein  $\hat{\lambda}(\varepsilon)$ , so dass

$$1 - \varepsilon < h_\lambda(\pi, z) < 1 + \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \hat{\lambda}(\varepsilon)$$

richtig ist.

2. Zunächst beobachten wir wegen  $\frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$  die Implikation

$$h_\lambda(\pi, z) < 1 + \varepsilon \implies \frac{1}{h_\lambda(\pi, z)} > 1 - \varepsilon.$$

Weiterhin finden wir aus der Äquivalenz von

$$h_\lambda(\pi, z) > 1 - \varepsilon \text{ und } \frac{1}{h_\lambda(\pi, z)} < \frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

und wegen

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} > \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

zu  $\widehat{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} > 0$  die Existenz eines  $\lambda(\widehat{\varepsilon})$ , so dass:

$$1 - \widehat{\varepsilon} < \frac{1}{h_\lambda(\pi, z)} < 1 + \widehat{\varepsilon}, \quad \forall z \in \mathcal{Z}_\lambda. \quad (6.18)$$

q.e.d.

Unter Verwendung der Dichtefunktionen der gestutzten Normalverteilung (6.6) und

$$\overline{f}(z, \pi; \lambda) = \pi f_1(z; \lambda) + (1 - \pi) f_2(z; \lambda) : \mathcal{Z}_\lambda \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

wird der durch  $\lambda$  parametrisierte Sprungkoeffizient (4.9)

$$\gamma_\lambda(\pi, z) = \gamma(\pi, z; \lambda) := \pi \left( \frac{f_1(z; \lambda)}{\overline{f}(z, \pi; \lambda)} - 1 \right) : [0, 1] \times \mathcal{Z}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet, welcher uns bereits im Generator des Zustandsprozesses  $\{\Pi_t\}_{t \in [0, T]}$  aus dem Modellfall in Paragraph 4.1 begegnet ist. Desweiteren ist es für weitere Zwecke günstiger die Funktion  $\gamma_\lambda$  in die durch folgende Rechnung modifizierte Gestalt zu bringen:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda(\pi, z) &= \pi \left( \frac{f_1(z; \lambda)}{\overline{f}(z, \pi; \lambda)} - 1 \right) = \pi \left( \frac{f_1(z; \lambda) - \pi f_1(z; \lambda) - (1 - \pi) f_2(z; \lambda)}{\pi f_1(z; \lambda) + (1 - \pi) f_2(z; \lambda)} \right) \\ &= \pi(1 - \pi) \frac{1 - L_\lambda(z)}{\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

**Hilfssatz 6.7.** Zu jedem hinreichend kleinem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\varepsilon)$ :

$$|\gamma_\lambda(\pi, z)| < \varepsilon \quad \forall (\pi, z) \in [0, 1] \times \mathcal{Z}_\lambda \quad \forall \lambda \geq \widehat{\lambda}(\varepsilon).$$

*Beweis:* Unter Verwendung der Hilfssätze 6.5 und 6.6 und (6.18) finden wir zu jedem hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  ein  $\widehat{\lambda}(\varepsilon)$ , so das für alle  $\lambda \geq \widehat{\lambda}(\varepsilon)$  folgende Abschätzung richtig ist:

$$\begin{aligned} |\gamma_\lambda(\pi, z)| &= \left| \pi(1 - \pi) \frac{1 - L_\lambda(z)}{\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z)} \right| \leq |1 - L_\lambda(z)| \cdot \left| \frac{1}{\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z)} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} < \varepsilon \end{aligned}$$

**Satz 6.8.** Sei  $\sigma_J > 0$ ,  $\mathcal{Z}_\lambda$  aus (6.4),  $L_\lambda(z)$  der Likelihoodquotient (6.15),  $w$  aus (6.10) und

$$\hat{I}(\lambda) := \int_{\mathcal{Z}_\lambda} (1 - L_\lambda(z))^2 f_1(z; \lambda) dz ,$$

dann ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \hat{I}(\lambda) = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{(1 + w(\kappa))\sigma_J^2}.$$

*Beweis:*

1. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \hat{I}(\lambda) &= \int_{\mathcal{Z}_\lambda} (1 - L_\lambda(z))^2 f_1(z; \lambda) dz \\ &= 1 - 2I_1(\lambda) + I_2(\lambda) \end{aligned}$$

mit

$$I_1(\lambda) := \int_{\mathcal{Z}_\lambda} L_\lambda(z) f_1(z; \lambda) dz \quad \text{und} \quad I_2(\lambda) := \int_{\mathcal{Z}_\lambda} L_\lambda^2(z) f_1(z; \lambda) dz.$$

2. Aus den Dichten der gestutzten Normalverteilung (6.5) und (6.6) erhalten wir für den Likelihoodquotienten  $L_\lambda(z)$  unter Verwendung von (6.16)

$$\begin{aligned} L_\lambda(z) &= \exp \left( -\frac{1}{2\lambda\sigma_J^2} (2(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))z + \tilde{\mu}_2^2(\lambda) - \tilde{\mu}_1^2(\lambda)) \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2\lambda\sigma_J^2} (lz + n) \right) \end{aligned}$$

mit  $n_1(\lambda) := 2(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))$  und  $n_2(\lambda) = \tilde{\mu}_2^2(\lambda) - \tilde{\mu}_1^2(\lambda)$ . Damit ist

$$L_\lambda^2(z) = \exp \left( -\frac{1}{2\lambda\sigma_J^2} (2n_1(\lambda)z + 2n_2(\lambda)) \right).$$

3. Die Berechnung der Integrale  $I_k(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$  ergibt

$$\begin{aligned} I_k(\lambda) &= \int_{\mathcal{Z}_\lambda} L_\lambda^k(z) f_1(z; \lambda) dz \\ &= \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \frac{1}{c_2(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}\sigma_J} \exp \left( -\frac{1}{2\lambda\sigma_J^2} (kn_1(\lambda)z + kn_2(\lambda) + (z - \tilde{\mu}_1(\lambda))^2) \right) dz \\ &= \frac{1}{c_2(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}\sigma_J} \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \exp \left( -\frac{1}{2\lambda\sigma_J^2} \left[ \left( z - \left( \tilde{\mu}_1(\lambda) - \frac{kn_1(\lambda)}{2} \right) \right)^2 + A_k(\lambda) \right] \right) dz \end{aligned}$$

mit  $A_k(\lambda) := kn_1(\lambda)\tilde{\mu}_1(\lambda) - \frac{(kn_1(\lambda))^2}{4} + kn_2(\lambda)$ . Dabei haben wir den Exponenten durch quadratische Ergänzung erhalten.

4. Sei  $k = 1$ . Dann erhalten wir wegen  $\tilde{\mu}_1(\lambda) - \frac{kn_1(\lambda)}{2} = \tilde{\mu}_2(\lambda)$  unmittelbar

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \exp\left(-\frac{A_1(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2}\right) \frac{1}{c_2(\lambda)} \int_{\mathbb{Z}_\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}\sigma_J} \exp\left(-\frac{(z - \tilde{\mu}_2(\lambda))^2}{2\lambda\sigma_J^2}\right) dz \\ &= \exp\left(-\frac{A_1(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2}\right) \\ &= 1 - \frac{A_1(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

5. Im Fall  $k = 2$  ergibt sich aus  $\tilde{\mu}_1(\lambda) - \frac{kn_1(\lambda)}{2} = 2\tilde{\mu}_2(\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda)$  und Hilfssatz 6.4

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \exp\left(-\frac{A_2(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2}\right) \frac{1}{c_2(\lambda)} \int_{\mathbb{Z}_\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}\sigma_J} \exp\left(-\frac{(z - (2\tilde{\mu}_2(\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda)))^2}{2\lambda\sigma_J^2}\right) dz \\ &= \exp\left(-\frac{A_2(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2}\right) \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} = \left(1 - \frac{A_2(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} \\ &= \left(1 - \frac{A_2(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2}\right) \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

6. Zusammenfassend erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \lambda \hat{I}(\lambda) &= \lambda(1 - 2I_1(\lambda) + I_2(\lambda)) \\ &= \lambda \left[ 1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{A_1(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) + \left(1 - \frac{A_2(\lambda)}{2\lambda\sigma_J^2}\right) \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] \\ &= \lambda \left( \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} - 1 \right) + \frac{A_1(\lambda)}{\sigma_J^2} - \frac{A_2(\lambda)}{2\sigma_J^2} \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{A_1(\lambda)}{\sigma_J^2} - \frac{A_2(\lambda)}{2\sigma_J^2} \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A_1(\lambda)}{\sigma_J^2} - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A_2(\lambda)}{2\sigma_J^2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{A_1(\lambda)}{\sigma_J^2} - \frac{A_2(\lambda)}{2\sigma_J^2} \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{A_1(\lambda)}{\sigma_J^2} - \frac{A_2(\lambda)}{2\sigma_J^2} \\ &= \frac{1}{2\sigma_J^2} \left( 2n_1(\lambda)\tilde{\mu}_1(\lambda) - 2\frac{n_1^2(\lambda)}{4} + 2n_2(\lambda) - (2n_1(\lambda)\tilde{\mu}_1(\lambda) - \frac{(2n_1(\lambda))^2}{4} + 2n_2(\lambda)) \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma_J^2} \frac{n_1^2(\lambda)}{2} = \frac{(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))^2}{\sigma_J^2}. \end{aligned}$$

Hilfssatz 6.4 und Bemerkung 6.2 ergeben schließlich

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \hat{I}(\lambda) &= \frac{w(\kappa)}{(1+w(\kappa))^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_J^2} + \frac{1}{(1+w(\kappa))^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_J^2} \\ &= \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{(1+w(\kappa))\sigma_J^2}.\end{aligned}$$

q.e.d.

Nun fügen wir die vorangegangenen Sätze und Hilfssätze zusammen und beweisen den für den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  zentralen Satz:

**Satz 6.9.** Sei  $\sigma_J > 0$ ,  $\sigma_S = \sqrt{1+w(\kappa)}\sigma_J$  mit  $w$  aus (6.10) und

$$\beta_J(\pi) = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_S} \pi(1 - \pi). \quad (6.20)$$

Weiterhin gelten die Voraussetzungen von Satz 6.1, dann erhält man zu  $\pi \in (0, 1)$  für den Integralterm des Generators von (3.27) für eine generische Funktion  $g \in \mathcal{C}^2((0, 1), \mathbb{R})$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \{g(\pi + \gamma_\lambda(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz = \frac{1}{2} g''(\pi) \beta_J^2(\pi).$$

*Beweis:*

1. Zunächst liefert eine Taylorentwicklung der Funktion  $g$  an der Stelle  $\pi \in (0, 1)$

$$g(\pi + \gamma_\lambda(\pi, z)) - g(\pi) = g'(\pi) \gamma_\lambda(\pi, z) + \frac{1}{2} g''(\pi + \xi \gamma_\lambda(\pi, z)) \gamma_\lambda^2(\pi, z)$$

für ein  $\xi = \xi(z, \pi) \in (0, 1)$ . Mit (6.19) und

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda(\pi, z) \bar{f}(z, \pi; \lambda) &= \pi(1 - \pi) \frac{1 - L_\lambda(z)}{\pi - (1 - \pi)L_\lambda(z)} \left( \pi f_1(z; \lambda) + (1 - \pi) f_2(z; \lambda) \right) \\ &= \pi(1 - \pi) \frac{1 - \frac{f_2(z; \lambda)}{f_1(z; \lambda)}}{\pi + (1 - \pi) \frac{f_2(z; \lambda)}{f_1(z; \lambda)}} \left( \pi f_1(z; \lambda) + (1 - \pi) f_2(z; \lambda) \right) \\ &= \pi(1 - \pi) (f_1(z; \lambda) - f_2(z; \lambda))\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma_\lambda(\pi, z) \bar{f}(z, \pi; \lambda) = \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \pi(1 - \pi) (f_1(z; \lambda) - f_2(z; \lambda)) = 0. \quad (6.21)$$

Insbesondere folgt aus (6.21) mit  $\pi \in (0, 1)$  die nachfolgend benötigte Eigenschaft

$$\int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma_\lambda(\pi, z) g'(\pi) \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz = 0 \quad \text{für alle } \lambda > 0. \quad (6.22)$$

Unter Verwendung von (6.22) und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir für den Integralterm des Generators

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \{g(\pi + \gamma_\lambda(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz \\ &= \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma_\lambda(z, \pi) g'(\pi) \bar{f}(z, \pi) dz + \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \frac{1}{2} g''(\pi + \xi \gamma_\lambda(\pi, z)) \gamma_\lambda^2(\pi, z) \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz \\ &= \frac{1}{2} g''(\pi + \xi \gamma_\lambda(\pi, \hat{z})) \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma_\lambda^2(\pi, z) \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz \end{aligned}$$

mit  $\hat{z} \in \mathcal{Z}_\lambda$ . Dabei konnten wir die Funktion  $g''$  wegen der Positivität von  $\gamma_\lambda^2 \bar{f}$  unter direkter Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (vgl. Satz 8 aus Kapitel V §3 aus [52]) vor das Integral ziehen. Wegen Hilfssatz 6.7 erhalten wir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \{g(\pi + \gamma_\lambda(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz = \frac{1}{2} g''(\pi) \beta_J^2(\pi)$$

mit

$$\beta_J^2(\pi) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma^2(\pi, z; \lambda) \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz.$$

2. Wegen  $\bar{f}(z, \pi; \lambda) = \pi f_1(z; \lambda) + (1 - \pi) f_2(z; \lambda) = (\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z)) f_1(z; \lambda)$  und

$$\begin{aligned} \gamma^2(\pi, z) \bar{f}(z, \pi; \lambda) &= \pi^2 (1 - \pi)^2 \frac{(1 - L_\lambda(z))^2}{(\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z))^2} \bar{f}(z, \pi; \lambda) \\ &= \pi^2 (1 - \pi)^2 \frac{(1 - L_\lambda(z))^2}{(\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z))} f_1(z; \lambda) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\beta_J^2(\pi) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma_\lambda^2(\pi, z) \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz = \pi^2 (1 - \pi)^2 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda I(\lambda) \quad (6.23)$$

mit

$$I(\lambda) := \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \frac{(1 - L_\lambda(z))^2}{(\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z))} f_1(z, \lambda) dz. \quad (6.24)$$

Mit Hilfssatz 6.6 finden wir zu jedem  $0 < \varepsilon < 1$  ein  $\hat{\lambda}(\varepsilon)$ , mit

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{\pi + (1 - \pi) L_\lambda(z)} \leq 1 + \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \hat{\lambda}(\varepsilon).$$



Folglich erhält man mit

$$\hat{I}(\lambda) = \int_{\mathcal{Z}_\lambda} (1 - L_\lambda(z))^2 f_1(z; \lambda) dz$$

aus Satz 6.8 folgende Ungleichungen:

$$(1 - \varepsilon)\hat{I}(\lambda) \leq I(\lambda) \leq (1 + \varepsilon)\hat{I}(\lambda).$$

Multiplikation mit  $\lambda$ , (6.20), (6.24) und Satz 6.8 ergibt schließlich

$$\beta_J^2(\pi) = \pi^2(1 - \pi)^2 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda I(\lambda) = \pi^2(1 - \pi)^2 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \hat{I}(\lambda) = \pi^2(1 - \pi)^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_S^2}.$$

q.e.d.

## 6.2 Diffusionsapproximation für zeitdiskrete Expertenmeinungen im Modellfall

Ausgangspunkt für den Übergang zu einem stetigen Experten ist nach den einführenden Gedanken zu Beginn des Kapitels 6 eine durch  $\lambda$  parametrisierte Familie diskreter Experten mit der Varianz  $\varrho_D^2$ . Dabei haben wir gefordert, dass die Varianz  $\varrho_D^2$  des diskreten Experten mit wachsendem  $\lambda$  die Asymptotik (6.2) besitzt, was wir durch die Wahl  $\tilde{\varrho}_D^2 = \lambda \sigma_J^2$  nach Satz 6.3 erreichen konnten. Die Aussagen des diskreten Experten haben wir als markierten Punktprozess  $(T_k^\lambda, Z_k^\lambda)_{k \geq 1}$  mit Intensität  $\lambda$  modelliert. Dabei entstehen die Aussagen  $Z_k^\lambda$  durch Abschneiden einer normalverteilten Zufallsgröße

$$\tilde{Z}_k^\lambda \sim \mathcal{N}(\mu(Y_{T_k}), \lambda \sigma_J^2)$$

auf dem Intervall  $\mathcal{Z}_\lambda$  gemäß (6.4). Der Investor kann nun zur Zeit  $t$  auf Basis der Renditen  $(R_s, s \leq t)$  (2.7) und der Expertenmeinungen  $Z_k^\lambda$  eine Schätzung  $\hat{\mu}_t(\Pi_t^\lambda) = \Pi_t^\lambda \mu_1 + (1 - \Pi_t^\lambda) \mu_2$  der Drift  $\mu$  berechnen. Zu diesem Zweck bedarf es der Betrachtung des Filters  $\Pi_t^\lambda = P(Y_t = e_1 | \mathcal{F}_t)$  mit der Filtergleichung (3.12)

$$d\Pi_t^\lambda = \alpha(\pi_t^\lambda) dt + \beta(\Pi_t^\lambda) dB_t^\lambda + \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma_\lambda(\Pi_{t-}^\lambda, z) \tilde{I}(dt \times dz),$$

mit dem Innovationsprozess

$$dB_t^\lambda = \frac{1}{\sigma_R} (dR_t - \hat{\mu}_t(\Pi_t^\lambda) dt)$$

und dem nach (3.38) für  $g \in \mathcal{C}^2((0, 1), \mathbb{R})$  zugeordneten Generator

$$\mathcal{D}^\lambda g(\pi) := \frac{1}{2} \beta^2(\pi) \partial_\pi^2 g(\pi) + \alpha(\pi) \partial_\pi g(\pi) + \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \{g(\pi + \gamma_\lambda(\pi, z)) - g(\pi)\} \bar{f}(z, \pi; \lambda) dz. \quad (6.25)$$

Vollziehen wir nun den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$ , dann konvergiert für alle  $\pi \in (0, 1)$  nach Satz 6.9 mit dem Integralteil aus (6.25) auch der Generator gemäß

$$\mathcal{D}^\lambda g(\pi) \longrightarrow \mathcal{D}^S g(\pi) := \frac{1}{2}(\beta^2(\pi) + \beta_J^2(\pi))\partial_\pi^2 g(\pi) + \alpha(\pi)\partial_\pi g(\pi). \quad (6.26)$$

Die Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  der Filtergleichung (3.12) haben in diesem (Modell-)Fall die Gestalt (4.7), (4.8) und (4.9), so dass wegen  $\beta_J$  gemäß (6.23) der Ausdruck  $\mathcal{D}^S g(\pi)$  die Gestalt eines Generators eines Diffusionsprozesses besitzt. Ziel dieses Paragraphen ist es nun einen Diffusionsprozeß mit dem Generator  $\mathcal{D}^S$  anzugeben. Wir gewinnen damit eine Interpretation für den Übergang vom diskreten Experten mit Varianz  $\varrho_D^2 = \varrho_D^2(\lambda, \kappa, \sigma_J)$  hin zum stetigen Experten mit Volatilität  $\sigma_S = \sigma_S(\kappa, \sigma_J)$  gemäß Satz 6.9. Nun führen wir die Konstruktion eines solchen Prozesses durch und geben dessen Generator an:

1. Sei  $\begin{pmatrix} R_t \\ J_t \end{pmatrix}$  ein vektorwertiger Prozess, welcher der vektorwertigen stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} dR_t \\ dJ_t \end{pmatrix} = \mu(Y_t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_R & 0 \\ 0 & \sigma_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t \\ dW_t^S \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

genügt. Dabei sei die erste Komponente des Prozesses der Renditeprozess  $R$  aus (2.7) mit  $\mu(e_i) = \mu_i$ ,  $i = 1, 2$  und der Markov-Kette  $Y$  aus (2.4). Dagegen kann man den zweiten Komponentenprozess  $J_t$  als zeitstetige Aussagen eines Experten interpretieren. Als Filtergleichung erhalten wir unter Berücksichtigung von Satz 9 aus dem Buch von Lipster und Shiryaev [37]

$$d\Pi_t^S = \alpha(\Pi_t^S) + (\beta(\Pi_t^S) \quad \beta_J(\Pi_t^S)) \begin{pmatrix} dB_t \\ dB_t^J \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

mit dem Innovationsprozess

$$\begin{pmatrix} dB_t \\ dB_t^J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_R}(dR_t - \hat{\mu}(\Pi_t^S)dt) \\ \frac{1}{\sigma_S}(dJ_t - \hat{\mu}(\Pi_t^S)dt) \end{pmatrix}$$

Der Generator des Diffusionsprozesses besitzt nun die gleiche Gestalt wie  $\mathcal{D}^S g(\pi)$  in (6.26). Damit haben wir mit (6.27) einen Diffusionsprozess gefunden, dessen Generator dem in (6.26) identisch ist. Den Prozess  $J_t$  interpretieren wir als zeitstetige Expertenmeinung mit Volatilität  $\sigma_S$ .

Im Grenzfall für  $\lambda \rightarrow \infty$  stimmen die Generatoren der Filterprozesse  $\Pi^\lambda$  und  $\Pi^S$  überein. Dies und da nur die Generatoren in die Lösung des nachfolgenden Nutzenmaximierungsproblems eingehen, motiviert die Approximation des zeitdiskreten Experten mit Parametern  $(\lambda, \kappa, \sigma_J)$  durch einen zeitstetigen Experten mit der Volatilität  $\sigma_S = \sigma_J \sqrt{1 + w(\kappa)}$ .

### 6.3 Nutzenmaximierungsproblem mit stetigem Experten

Die Lösung des Nutzenmaximierungsproblems (2.14) mit stetigem Experten nimmt seinen Ausgangspunkt im Nutzenmaximierungsproblem mit diskretem Experten. Zur Lösung des Nutzenmaximierungsproblems (2.14) mit einem stetigen Experten, genügt es den Argumenten des Kapitels 3 folgend die durch  $\lambda$  parametrisierte Filtergleichung (6.28) analog den Argumenten in Kapitel 3 in die Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} d\Pi_t^\lambda &= (\alpha(\Pi_t^\lambda) + \beta(\Pi_t^\lambda)\theta\sigma_R h_t)dt + \beta(\Pi_t^\lambda)dW_t + \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \gamma(\Pi_{t-}^\lambda, z)\tilde{I}(dt \times dz) \quad (6.29) \\ \pi_0^\lambda &= \check{p}_0 \end{aligned}$$

mit dem Generator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(r,\lambda)}g(\pi) &= \frac{1}{2}\beta^2(\pi)\partial_\pi^2 g(\pi) + (\alpha(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R r)\partial_\pi g(\pi) \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{Z}_\lambda} \{g(\pi + \gamma(\pi, z)) - g(\pi)\}\bar{f}(\pi, z)dz \quad (6.30) \end{aligned}$$

$$= \mathcal{D}^\lambda g(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R r\partial_\pi g(\pi) \quad (6.31)$$

mit  $\mathcal{D}^\lambda$  gemäß (6.25) zu überführen und mit

$$v^\lambda(t, \pi, h) = E\left(\exp\left\{-\int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{\lambda, (t, \pi, h)}, h_s)ds\right\}\right) \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}, \quad h \in \mathcal{H} \quad (6.32)$$

$$V^\lambda(t, \pi) := v^\lambda(t, \pi, h^*) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \{v^\lambda(t, \pi, h)\}, \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S} \quad \theta \in (0, 1) \quad (6.33)$$

das durch  $\lambda$  parametrisierte Problem

$$(UnRegP)_\lambda = \{(6.29), (6.32), (6.33)\}$$

zu betrachten mit der zugehörigen DPE

$$\begin{aligned} \partial V_t^\lambda(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{\mathcal{D}^{(r,\lambda)}V^\lambda(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R r\partial_\pi V^\lambda(\pi) - \tilde{b}(\pi, r)V^\lambda(t, \pi)\} &= 0 \\ V^\lambda(T, \pi) &= 1. \end{aligned}$$

Im Falle  $\theta < 0$  genügt es in (6.33) anstelle des Supremums das Infimum zu bilden. Vollziehen wir den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  entsteht zunächst die Filtergleichung (6.28), welche wir mit den selben Argumenten wie in Paragraph 3.1 in die Zustandsgleichung

$$d\Pi_t^S = (\alpha(\pi_t^S) + \beta(\Pi_t^S)\theta\sigma_R h_t)dt + (\beta(\Pi_t^S)\beta_J(\Pi_t^S))\begin{pmatrix} dW_t \\ dB_t^J \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

überführen, für welche wir mit

$$v^S(t, \pi, h) = E\left(\exp\left\{-\int_t^T \tilde{b}(\Pi_s^{S, (t, \pi, h)}, h_s)ds\right\}\right) \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S}, \quad h \in \mathcal{H} \quad (6.35)$$

$$V^S(t, \pi) := v^S(t, \pi, h^*) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \{v^S(t, \pi, h)\}, \quad (t, \pi) \in [0, T] \times \mathcal{S} \quad (6.36)$$

das Problem

$$(UnRegP)_S = \{(6.34), (6.35), (6.36)\}$$

formulieren. Wegen (6.26) erhalten wir aus der Konvergenz der Generatoren

$$\mathcal{L}^{(r,\lambda)}g(\pi) := \mathcal{D}^\lambda g(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R r \partial_\pi g(\pi) \longrightarrow \mathcal{D}^S g(\pi) + \beta(\pi)\theta\sigma_R r \partial_\pi g(\pi) = \mathcal{L}^{(r,S)}g(\pi)$$

für die Wertfunktion des Problems  $(UnRegP)_S$  die DPE

$$\partial V_t^S(t, \pi) + \sup_{r \in \mathcal{K}} \{ \mathcal{L}^{(r,S)} V^S(\pi) - \tilde{b}(\pi, r) V^S(t, \pi) \} = 0. \quad (6.37)$$

Insgesamt haben wir nun die Vermutung, dass im Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  aus der Konvergenz der Generatoren

$$\mathcal{L}^{(r,\lambda)}g(\pi) \longrightarrow \mathcal{L}^{(r,S)}g(\pi), \quad \text{für alle } g \in \mathcal{C}^2((0, 1), \mathbb{R})$$

der Zustandsprozesse (6.29) und (6.34) auch die Konvergenz der Wertfunktionen folgt:

$$V^\lambda(t, \pi) \longrightarrow V^S(t, \pi).$$

Wäre dieser Sachverhalt richtig könnte man für große  $\lambda$  die Wertfunktionen  $V^\lambda$  und optimalen Strategien  $h_\lambda^*$  des  $\lambda$ -Investors, d.h. desjenigen Investors der sich eines diskreten Experten mit Parametern  $(\lambda, \sigma_J, \kappa)$  bedient, durch die Wertfunktionen  $V^S$  und optimalen Strategien  $h_S^*$  des S Investors, d.h. desjenigen Investors der auf einen stetigen Experten mit Volatilität  $\sigma_S = \sigma_J \sqrt{1 + w(\kappa)}$  zurückgreift, approximieren.

Im Folgenden wollen wir unsere Vermutung numerisch nachvollziehen. Zu diesem Zweck formulieren wir DPE (6.37) in ausgeschriebener Form:

$$\begin{aligned} 0 = & \partial V_t^S(t, \pi) + \frac{1}{2}(\beta_R^2(\pi) + \beta_J^2(\pi))\partial_\pi^2 V^S(t, \pi) \\ & + \sup_r \left\{ \beta\theta\sigma_R r \partial_\pi V^S(t, \pi) + V^S(t, \pi)\theta \left[ rM(\pi) - \frac{1-\theta}{2}\sigma_R^2 r^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Das Supremum wird mit den gleichen Annahmen und Gründen wie in Satz 3.6 und Bemerkung 3.7 an der Stelle

$$h_S^*(t, \pi) := r^*(t, \pi) = \frac{1}{(1-\theta)\sigma_R^2} \left( \hat{\mu}(\pi) + \sigma_R \beta \frac{\partial_\pi V^S(t, \pi)}{V^S(t, \pi)} \right) \quad (6.39)$$

mit  $\hat{\mu}$  gemäß (4.11) angenommen und besitzt damit die gleiche Gestalt wie in (4.15). Zur Auflösung des Supremums setzt man (6.39) in Gleichung (6.38) ein und in analoger Rechenweise wie in (3.45) finden wir

$$\begin{aligned} \partial_\pi V^S(t, \pi) \beta(\pi) \theta \sigma_R r^* &= \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\hat{\mu}(\pi) \beta(\pi) \partial_\pi V^S(t, \pi)}{\sigma_R} + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\beta_R^2 (\partial_\pi V^S(t, \pi))^2}{V^S(t, \pi)} \\ V^S(t, \pi) \theta \hat{\mu}(\pi) r^* &= \frac{\theta}{1-\theta} \frac{V^S(t, \pi) \hat{\mu}^2(\pi)}{\sigma_R^2} + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\hat{\mu}(\pi) \beta(\pi) \partial_\pi V^S(t, \pi)}{\sigma_R} \end{aligned}$$

Mit

$$(r^*(t, \pi))^2 = \frac{1}{(1-\theta)^2 \sigma_R^4} \left[ \hat{\mu}^2(\pi) + \frac{2\sigma_R \beta(\pi) \partial_\pi V^S(t, \pi) \hat{\mu}(\pi)}{V^S(t, \pi)} + \frac{\sigma_R^2 \beta_R^2 (\partial_\pi V^S(t, \pi))^2}{(V^S)^2(t, \pi)} \right]$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{-V^S(t, \pi) \theta (1-\theta) \sigma_R^2 (r^*(t, \pi))^2}{2} \\ &= -\frac{\theta}{1-\theta} \frac{\hat{\mu}^2(\pi) V^S(t, \pi)}{2\sigma_R^2} - \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\beta(\pi) \hat{\mu}(\pi) \partial_\pi V^S(t, \pi)}{\sigma_R} - \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\beta^2 (\partial_\pi V^S(t, \pi))^2}{2V^S(t, \pi)}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir aus (6.38) die nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t V^S(t, \pi) + \frac{1}{2} (\beta^2(\pi) + \beta_J^2(\pi)) \partial_\pi^2 V^S(t, \pi) \\ &\quad + \left( \alpha(\pi) + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\beta(\pi) \hat{\mu}(\pi)}{\sigma_R} \right) \partial_\pi V^S(t, \pi) + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\hat{\mu}^2(\pi)}{2\sigma_R} V^S(t, \pi) \\ &\quad + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\beta(\pi)}{2V^S(t, \pi)} \left( \partial_\pi V^S(t, \pi) \right)^2 \\ 1 &= V^S(T, \pi). \end{aligned} \tag{6.40}$$

Während wir die PIDE (3.8) in ihrem differentiellen Anteil mit der Transformation  $V^S(t, \pi) := G^{1-\theta}(t, \pi)$  noch linearisieren konnten, gelingt dies an dieser Stelle schon nicht mehr. Wie man in einer einfachen Rechnung nachvollziehen kann, führt die angesprochene Transformation in diesem Fall auf die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t G(t, \pi) + \frac{1}{2} (\beta^2(\pi) + \beta_J^2(\pi)) \partial_{\pi\pi} G(t, \pi) + \left( \alpha(\pi) + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\beta(\pi) \hat{\mu}(\pi)}{\sigma_R} \right) \partial_\pi G(t, \pi) \\ &\quad + \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \frac{\hat{\mu}^2(\pi)}{2\sigma_R^2} G(t, \pi) - \frac{\theta}{2} \beta_J^2(\pi) \left( \partial_\pi G(t, \pi) \right)^2 \\ 1 &= G(T, \pi), \end{aligned}$$

welche insbesondere wegen des letzten Terms, in welchem die partielle Ableitung nach  $\pi$  quadratisch eingeht, nichtlinear ist. Um nun das Nutzenmaximierungsproblem für den in stetiger Zeit auftretenden Experten zu lösen, bedarf es in Ermangelung einer geschlossenen Lösung der Gleichung (6.40) einer numerischen Näherungslösung. Es bietet sich an dieser Stelle an, die gesuchte Lösung mit den Methoden des Policy Improvement zu lösen, siehe Paragraph 4.3. Wir erwarten das mit wachsendem  $\lambda$ , die Abweichungen zwischen  $V^\lambda$  und  $V^S$  immer kleiner werden. Zur Illustration dieses Sachverhalts betrachten wir folgendes numerische Experiment: Um für alle  $\lambda$  denselben Integrationsbereich  $\mathcal{Z}_\lambda$  anzusetzen, stellen wir in der folgenden Abbildung für verschiedene  $\lambda$  zu festem  $\tilde{\varrho}_D = 0.3$  und  $\sigma_J = \tilde{\varrho}_D / \sqrt{\lambda}$  die Wertfunktion  $V^\lambda$  des diskreten Experten mit der Wertfunktion  $V^S$  des stetigen Experten

anhand des Parametersatzes aus Tabelle 5.1 gegenüber. Mit diesem Ansatz kann man die vermutete Konvergenz beobachten, wie folgende Abbildung zeigt.

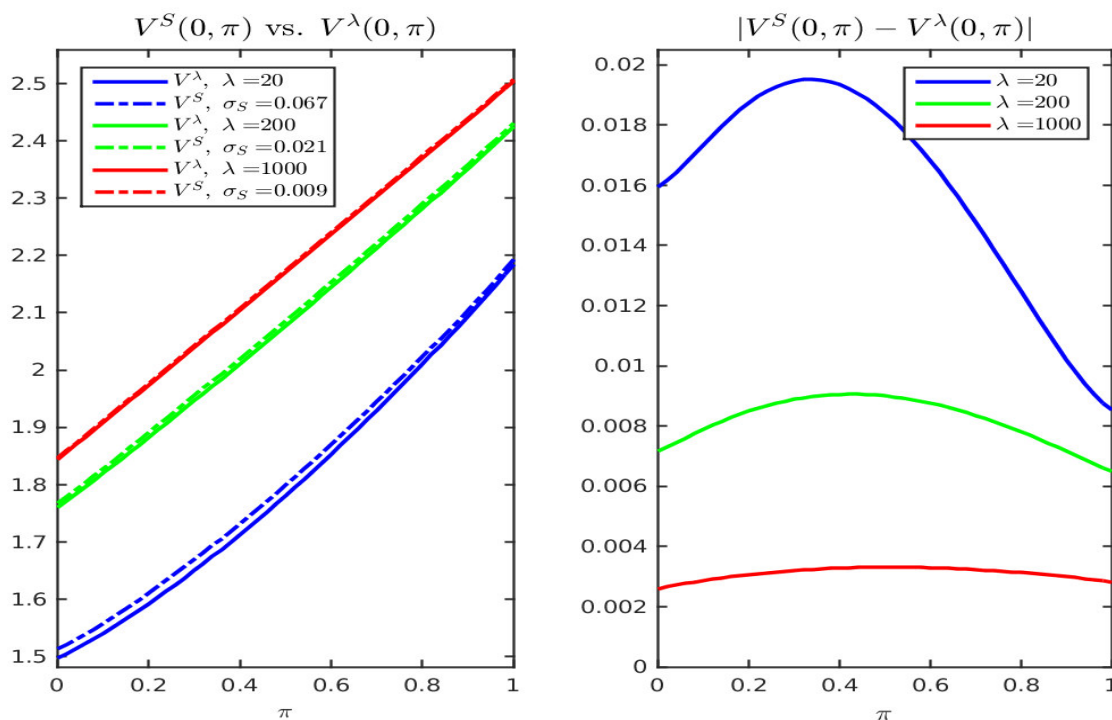


Abbildung 6.20:

LINKS: Gegenüberstellung der Wertfunktion  $V^\lambda$  des diskreten Experten mit den Parametern  $(\lambda, \kappa, \sigma_J)$  und der Wertfunktion  $V^S$  des zugeordneten stetigen Experten mit Volatilität  $\sigma_S$   
 RECHTS: punktwiser absoluter Fehler zwischen  $V^\lambda$  und ihrer Approximation  $V^S$

Wir sehen, dass die punktwisen Abweichungen der zu obiger Figur gehörenden Wertfunktionen der diskreten und stetigen Experten mit wachsendem  $\lambda$  kleiner werden.

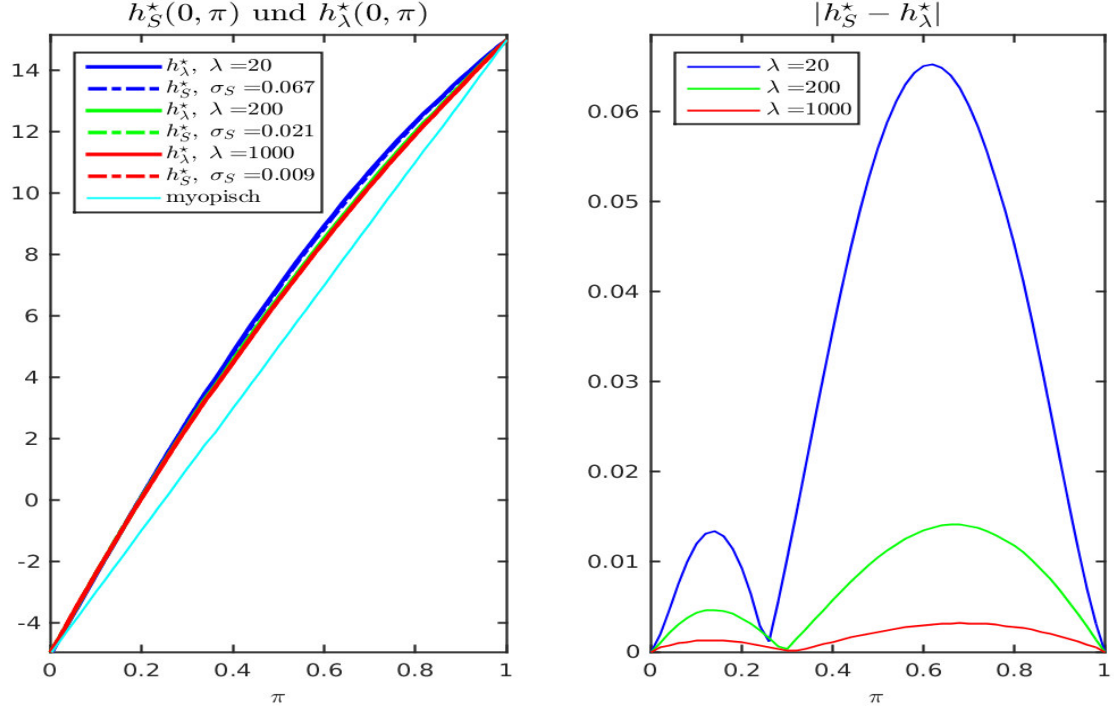


Abbildung 6.21:

LINKS: Gegenüberstellung der optimalen Strategie  $h_\lambda^*$  des diskreten Experten mit den Parametern  $(\lambda, \kappa, \sigma_J)$  und der optimalen Strategie  $h_S^*$  des zugeordneten stetigen Experten mit Volatilität  $\sigma_S$   
 RECHTS: punktwiser absoluter Fehler

## A Grundlagen

### A.1 Girsanov-Theorem und Novikov Bedingung

Die Bücher [56] von Shreve und Øksendal [43] bieten einen lesenswerten und raschen Einstieg in die grundlegenden Begriffe und Konzepte zur stochastischen Analysis, von denen wir nur einige wenige, für diese Monographie unabdingbare, zitieren wollen.

**Definition A.1.** Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $X = \{X_t\}_{t \in I}$  ein stochastischer Prozess, so bezeichnet man mit

$$\mathcal{G}^X := \{\sigma(X_s : s \leq t)\}_{t \in I}$$

die von  $X$  erzeugte Filtration.

Dem Buch [8] vom Björk entnehmen wir Theorem 11.3 und Lemma 11.5:

**Satz A.2. (Girsanov-Theorem)**

Sei  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  mit  $W_t := (W_t^1, \dots, W_t^n)$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  ein bezüglich dem Maß  $P$   $\mathbb{F}$ -adaptierter  $n$ -dimensionaler Standard-Wiener-Prozess und  $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$  mit  $\varphi_t = (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^n)$  ein  $n$ -dimensionaler adaptiver stochastischer Prozess. Weiter sei  $(Z_t)_{t \in [0, T]} \in \mathbb{R}$  ein stochastischer Prozess, welcher der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dZ_t &= \varphi_t Z_t dW_t \\ Z_0 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

genügt und somit von folgender Gestalt ist:

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t \varphi_s dW_s - \frac{1}{2} \|\varphi_s\|_2^2 ds \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Weiterhin nehmen wir  $E^P[Z_T] = 1$  an und definieren durch  $\frac{d\tilde{P}}{dP} = Z_T$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{P}$  auf  $\mathcal{F}_T$ . Dann ist der Prozeß  $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$  mit

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \varphi_s ds$$

ein  $n$ -dimensionaler Standard-Wiener-Prozess bezüglich  $\tilde{P}$ .

**Satz A.3. (Novikov-Bedingung)**

Für den Girsanovkern  $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$  aus Satz (A.2) gelte die Novikovbedingung

$$E^P \left( \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\varphi_t\|_2^2 dt \right\} \right) < \infty. \quad (\text{A.3})$$

Dann ist der gemäß (A.1) definierte stochastische Prozess  $Z$  ein Martingal und es ist  $E^P(Z_T) = 1$ .

## A.2 Zeitstetige Markov Ketten

**Definition A.4.** Ein stochastischer Prozess  $(Y_t)_{t \geq 0}$  mit abzählbarem Zustandsraum  $\mathcal{M} := \{e_1, e_2, \dots\}$  heißt zeitstetige Markov-Kette, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle Zeitpunkte  $0 \leq s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < s \leq t$  gilt:

$$P(\{Y_t = e_j | Y_s = e_i, Y_{s_n} = e_{i_n}, \dots, Y_{s_0} = e_{i_0}\}) = P(\{Y_t = e_j | Y_s = e_i\})$$

für beliebige  $e_j, e_i, e_{i_n}, \dots, e_{i_0} \in \mathcal{M}$ .

Eine zeitstetige Markov-Kette wird gemäß dem Satz von Chapman-Kolmogoroff vollständig beschrieben durch die Angabe ihrer



## 1. Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}(s, t) := P(\{Y_t = e_j | Y_s = e_i\}), \quad s \leq t$$

## 2. und der Anfangsverteilung

$$\check{p}_0 := (P(\{Y_0 = e_i\}))_{e_i \in \mathcal{M}}. \quad (\text{A.4})$$

Die Markov-Kette  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  heißt homogen, wenn weiterhin gilt

$$P(\{Y_{t+s} = e_j | Y_s = e_i\}) = P(\{Y_t = e_j | Y_0 = e_i\}) = p_{ij}(0, t) =: p_{ij}(t).$$

**Definition A.5.** Sei  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  eine homogene, zeitstetige Markov-Kette mit den Übergangsmatrizen  $(P(t))_{t \geq 0}$  gemäß

$$P(t) := \{p_{ij}(t)\}_{i,j \in \mathcal{M}}, \quad t > 0 \quad \text{und} \quad p_{ij}(0) := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Als Intensitätsmatrix oder Generator einer diskreten homogenen Markov-Kette bezeichnen wir eine reelle Matrix  $Q$ , die der Beziehung

$$e^{tQ} = P(t), \quad t \geq 0$$

genügt, wobei

$$e^{tQ} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k = I + tQ + \frac{t^2}{2} Q^2 + \dots$$

*Bemerkung:*

1) Unmittelbar aus der Definition ergibt sich

$$Q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - I}{t}, \quad \text{d.h.} \quad q_{ij} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}, & i \neq j \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - 1}{t}, & i = j \end{cases}.$$

2) Für alle  $e_i, e_j \in \mathcal{M}$  mit  $i \neq j$  und alle  $t \geq 0$  gilt  $p_{ij}(t) \geq 0$  und damit  $\frac{p_{ij}(t)}{t} \geq 0$  bzw.  $q_{ij}(t) \geq 0$ . Weiterhin gilt  $q_{ii}(t) < 0$  wegen  $p_{ii} - 1 < 0$  und  $t > 0$ .

## A.3 Sprungmaß eines Sprungprozesses

Wir folgen in dieser kleinen Zusammenstellung dem Buch von Rama Cont [11], sowie insbesondere dem sehr lesenswerten Skript von Michail Barski [6], welches einen sehr intuitiven und leicht verständlichen Zugang des Themenkomplexes bietet.

**Definition A.6.** Sei  $T_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eine steigende Folge von Zufallsvariablen mit  $T_n \rightarrow +\infty$ , f.s., dann heißt der Prozess

$$X_t := \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{t \geq T_n\}}$$

ein Zählprozess.

**Definition A.7.** Sei  $\{\tau_i\}_{i=1,2,\dots}$  eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit  $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda)$  mit  $\lambda > 0$ . Für jedes  $t > 0$  definieren wir die Zufallsvariable

$$N_t := \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ k, & t \in [\tau_1 + \dots + \tau_k, \tau_1 + \dots + \tau_{k+1}) \end{cases}$$

Dann nennen wir den Prozess  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  Poissonprozess mit Parameter  $\lambda$

An dieser Stelle fassen wir einige wohlbekannten Eigenschaften des Poisson-Prozess ohne Beweis zusammen, wie wir sie im Folgenden benötigen werden.

**Satz A.8.** Sei  $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$  ein Poisson-Prozess. Dann gilt

- a)  $N$  besitzt unabhängige und stationäre Zuwächse, d.h. es gilt  $N_t - N_s \sim N_{t-s}$ .
- b) Für jedes  $t > 0$  ist  $N_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$ , d.h.

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- c) Die charakteristische Funktion von  $N_t$  hat die Form

$$E[e^{iuN_t}] = e^{\lambda t(e^{iu} - 1)}, \quad u \in \mathbb{R}$$

- d) Sei  $P$  eine mit Parameter  $\lambda$  Poissonverteilte Zufallsvariable, so gilt

$$E[a^P] = e^{\lambda(a-1)}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

**Definition A.9.** Sei  $N$  ein Poissonprozess. Der Prozess

$$\tilde{N}_t := N_t - \lambda t, \quad t \leq 0$$

heißt kompensierter Poissonprozess.

**Definition A.10.** Das Maß  $\mu$  auf  $E \subset \mathbb{R}^d$  heißt Radon Maß, falls

$$\mu(B) < +\infty$$

für jede messbare kompakte Menge  $B$  aus  $E$  gilt.

**Definition A.11. (Allgemeines Poisson'sches Zählmaß)**

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $E \subset \mathbb{R}^d$  und  $\mu$  ein Radon Maß auf  $(E, \mathcal{E})$ . Ein Poissonsches Zählmaß auf  $E$  mit Intensitätsmaß  $\mu$  ist ein Zählmaß  $M: \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$ , das folgende Bedingungen erfüllt:

- a) Für fast alle  $\omega \in \Omega$  ist  $M(\omega, \cdot)$  ein Radon Maß auf  $E$  mit  $M(\omega, A) \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{E}$ .
- b) Für jede kompakte Menge  $A \in \mathcal{E}$  ist die Zufallsvariable  $M(\cdot, A)$  Poissonverteilt mit Parameter  $\mu(A)$ , d.h.

$$P(M(\cdot, A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Für disjunkte Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$  sind die Zufallsvariablen

$$M(\cdot, A_1), M(\cdot, A_2), \dots, M(\cdot, A_n)$$

stochastisch unabhängig.

An dieser Stelle geben wir nach dem Skript von Barski [6] folgendes Beispiel an:

**Beispiel A.12.** Wie wir uns anhand obiger Definition klarmachen können, zählt der Poissonprozess die Anzahl seiner Sprungzeitpunkte auf dem Intervall  $[0, t]$ :

$$N_t = \#\{i \geq 1 : T_i \in [0, t]\}.$$

Da nun die Anzahl der Sprungzeitpunkte auf dem Intervall  $(s, t]$  gleich  $N_t - N_s$  ist, können wir den Poissonprozess mit einem Maß auf  $\mathbb{R}_+$  identifizieren:

$$M(\omega, A) := \#\{i \geq 1 : T_i \in A\}, \quad A \subset \mathbb{R}_+.$$

Da dieses Maß von  $\omega$  abhängig ist, bezeichnet man es als Zufallsmaß (alternativ Zählmaß, Poisson'sches Zählmaß). Die Intensität des Poissonprozesses bestimmt den Mittelwert des Maßes in folgendem Sinne

$$E[M(\cdot, A)] = \lambda|A|,$$

mit Lebesguemaß  $|\cdot|$ . Analog dem kompensierten Poissonprozess bezeichnet man mit

$$\widetilde{M}(\omega, A) := M(\omega, A) - \lambda|A| = M(\omega, A) - \int_A \lambda ds$$

das kompensierte Maß. Weiterhin schreiben wir

$$\begin{aligned} N_t(\omega) &= M(\omega, [0, t]) = \int_0^t M(\omega, ds) \\ \widetilde{N}_t(\omega) &= \widetilde{M}(\omega, [0, t]) = \int_0^t \widetilde{M}(\omega, ds) = \int_0^t M(\omega, ds) - \int_0^t \lambda ds. \end{aligned}$$

Nun zitieren wir einen Satz, der angibt wie man aus einem Poisson'schem Zählmaß einen Sprungprozess erhalten kann.

**Satz A.13.** Sei  $M$  ein Poisson'sches Zählmaß auf  $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  mit Intensität  $\mu$ . Für die bzgl.  $\mu$  absolut integrierbare Funktion  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ist der durch

$$\begin{aligned} X_t &:= \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) \widetilde{M}(ds, dy) \\ &= \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds, dy) - \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) \mu(ds, dy) \end{aligned}$$

definierte Prozess wohldefiniert. Ferner handelt es sich um ein Martingal.

Man kann auch den umgekehrten Weg gehen und zeigen, dass jeder cadlag-Sprungprozess ein gewisses Zählmaß bestimmt. Dieses Zählmaß wird im Allgemeinen aber kein Poisson'sches Zählmaß sein:

Sei  $X_t$ ,  $t \in [0, T]$  ein cadlag Sprungprozess mit Werten in  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist die Menge der Sprungzeitpunkte

$$\{t \in [0, T] : \Delta X_t \neq 0\}$$

für jeden Pfad höchstens abzählbar. Ihre Elemente bilden eine Folge  $T_1, T_2, \dots$  von Zufallsgrößen. Zu jedem Sprungzeitpunkt  $T_n$  hat der Prozess  $X$  einen Sprung in Höhe von

$$Y_n := X_{T_n} - X_{T_n-} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Die Folge  $(T_n, Y_n)$  bildet einen Punktprozess und das entsprechende Zählmaß

$$J_X(\omega, B) := \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))}(A) = \sum_{t \in [0, T], \Delta X_t \neq 0} \delta_{(t, \Delta X_t)}(A), \quad A \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

bezeichnet man als Sprungmaß von  $X$ .

**Bemerkung A.14.** Das Sprungmaß  $J_X([0, t] \times A)$  zählt die Anzahl der Sprünge im Intervall  $[0, t]$ . Handelt es sich um einen stetigen Prozess, dann ist  $J_X([0, t] \times A) \equiv 0$  für jedes  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$  und  $A \in \mathbb{R}$ .

**Satz A.15.** Sei  $X_t$ ,  $t \geq 0$  ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Intensität  $\lambda > 0$  und der Sprungverteilung  $f$ . Dann ist das Sprungmaß  $J_X$  von  $X$  ein Poisson'sches Zählmaß auf  $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$  mit Intensitätsmaß  $\mu(dx, ds) := \lambda f(dx) ds$ .

## A.4 Itô-Integral für Semimartingale

Nun zitieren wir aus dem Buch von R. Cont [11] Definition 8.4 des Kapitels 8 zur quadratischen Kovariation und der Proposition 8.19 zur Itô-Formel für Semimartingale.

---

**Definition A.16. (quadratische Kovariation)**

Seien  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  und  $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$  beliebige Semimartingale. Wir nennen dann das Semimartingal  $[X, Y]_{t \in [0, T]}$ , mit

$$[X, Y]_t := X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t X_{s-} dY_s - \int_0^t Y_{s-} dX_s$$

die quadratische Kovariation von  $X$  und  $Y$ .

Als unmittelbare Folgerung aus der Polarisationsformel notieren wir

**Satz A.17.** Sei  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  ein beliebiges Semimartingal und  $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$  ein Semimartingal von beschränkter Variation, dann ist  $[X, Y]_t = 0$ .

**Satz A.18. (Itô-Formel für Semimartingale)**

Sei  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$  ein  $d$ -dimensionales Semimartingal und  $F = F(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $\{F(t, X_t)\}_{t \geq 0}$  wieder ein Semimartingal und es gilt

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) = & \partial_t F(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^d \partial_{X^j} F(t, X_{t-}) dX_t^j + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \partial_{X^k X^l}^2 F(t, X_{t-}) d[X^k, X^l]_t^c \\ & + \int_{\mathcal{Z}} \left( F(t, X_{t-} + \gamma(X_{t-}, z)) - F(t, X_{t-}) - \sum_{j=1}^d \partial_{X_t^j} F(t, X_{t-}) \gamma^j(X_{t-}, z) \right) J(dt \times dz). \end{aligned}$$

Hierbei ist  $X_{t-} = \lim_{u \rightarrow t} X_u$  der linksseitige Grenzwert und  $\gamma(x, z) = (\gamma^1(x, z), \dots, \gamma^d(x, z))$  mit  $\gamma^j(X_{t-}, z) = X_t^j - X_{t-}^j$  die Sprunghöhe. Mit  $[X^k, X^l]_t^c$  wird die quadratische Kovariation der stetigen Anteile von  $X_t^k$  und  $X_t^l$  bezeichnet.

**Satz A.19. (Itô-Produktregel)**

Seien  $X, Y$  Semimartingale, dann genügt das Produkt der stochastischen Integralgleichung

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + [X, Y]_t$$

bzw. in differentieller Notation

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X, Y]_t.$$

## B Beweise aus Kapitel 6

### B.1 Beweis von Satz 6.1

*Beweis:*

- a) Nach Hilfssatz 4.1 sind die  $\tilde{\mu}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$  implizit gegeben durch Lösungen der nichtlinearen Gleichungen

$$0 = F_i(\lambda, m) := m + \frac{\varphi(\bar{l}(\lambda, m)) - \varphi(\bar{u}(\lambda, m))}{\Phi(\bar{u}(\lambda, m)) - \Phi(\bar{l}(\lambda, m))} \sqrt{\lambda} \sigma_J - \mu_i \quad (\text{B.1})$$

wobei

$$\bar{u}(\lambda, m) = \frac{u(\lambda) - m}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} = \kappa + \frac{M_0 - m}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} \rightarrow \kappa \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (\text{B.2})$$

$$\bar{l}(\lambda, m) = \frac{l(\lambda, m) - m}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} = -\kappa + \frac{M_0 - m}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} \rightarrow -\kappa \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (\text{B.3})$$

mit  $l(\lambda)$  und  $u(\lambda)$  aus (6.4). Dem Existenzbeweis stellen wir folgende Beobachtung voran: Aus elementaren Überlegungen folgt aus  $M_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  und (B.2) bzw. (B.3) zunächst

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 2M_0 - \mu_1 \\ \bar{l}(\lambda, 2M_0 - m) &= -\bar{u}(\lambda, m) \\ \bar{u}(\lambda, 2M_0 - m) &= -\bar{l}(\lambda, m). \end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} F_2(\lambda, 2M_0 - m) &= 2M_0 - m + \frac{\varphi(-\bar{u}(\lambda, m)) - \varphi(-\bar{l}(\lambda, m))}{\Phi(-\bar{l}(\lambda, m)) - \Phi(-\bar{u}(\lambda, m))} \sqrt{\lambda} \sigma_J - (2M_0 - \mu_1) \\ &= -m - \frac{\varphi(\bar{l}(\lambda, m)) - \varphi(\bar{u}(\lambda, m))}{\Phi(\bar{u}(\lambda, m)) - \Phi(\bar{l}(\lambda, m))} \sqrt{\lambda} \sigma_J + \mu_1 \\ &= -F_1(\lambda, m). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Sei also  $\tilde{\mu}_1(\lambda)$  bereits Lösung der Gleichung  $F_1(\lambda, m) = 0$ , dann impliziert (B.4)  $F_2(\lambda, 2M_0 - \tilde{\mu}_1(\lambda)) = 0$ . Damit folgt aus der Existenz einer Lösung  $\tilde{\mu}_1(\lambda)$  der Gleichung  $F_1(\lambda, m) = 0$  die Existenz einer Lösung  $\tilde{\mu}_2(\lambda) := 2M_0 - \tilde{\mu}_1(\lambda)$  der Gleichung  $F_2(\lambda, m) = 0$ . Darüberhinaus beweist diese Überlegung auch die Symmetrieeigenschaft  $\tilde{\mu}_1(\lambda) + \tilde{\mu}_2(\lambda) = 2M_0$ . Somit bedarf es nun lediglich eines Existenzbeweises für die Lösung  $\tilde{\mu}_1(\lambda)$  der Gleichung  $F_1(\lambda, m) = 0$ . Der Beweis der Existenz dieser Lösung erfolgt nun in drei Schritten: Wir zeigen

- i)  $F_1(\lambda, \mu_1) < 0$ ,
- ii) Für alle  $\lambda \geq \hat{\lambda}_1$  gilt  $F_1(\lambda, u(\lambda)) > 0$ ,
- iii) Es existiert ein  $\hat{\lambda}_2$ , so dass für alle  $\lambda \geq \hat{\lambda}_2$  gilt  $\partial_m F_1(\lambda, m) > 0$ .

Gemäß i) – iii) sichert  $\lambda > \max\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2\}$  der Zwischenwertsatz eine eindeutige Lösung  $m^* = \tilde{\mu}_1(\lambda) \in (\mu_1, u(\lambda))$  der Gleichung  $0 = F_1(\lambda, m)$ .

Zu i) Wegen  $M_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  und  $\mu_1 > \mu_2$  ist

$$d := \frac{M_0 - \mu_1}{\sqrt{\lambda}\sigma_J} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\sqrt{\lambda}\sigma_J} < 0$$

und

$$\begin{aligned}\bar{l}(\lambda, \mu_1) &= -\kappa + d < -\kappa \\ \bar{u}(\lambda, \mu_1) &= \kappa + d < \kappa\end{aligned}$$

Für die gerade und auf  $(-\infty, 0)$  streng monoton wachsende Funktion  $\varphi$  impliziert dies  $\varphi(\bar{l}(\lambda)) < \varphi(\bar{u}(\lambda))$  und für die monoton wachsende Verteilungsfunktion  $\Phi$  ergibt sich wegen  $\bar{l}(\lambda) < \bar{u}(\lambda)$  stets  $\Phi(\bar{l}(\lambda)) < \Phi(\bar{u}(\lambda))$ . Somit ist

$$F_1(\lambda, \mu_1) = \mu_1 + \frac{\varphi(\bar{l}(\lambda, \mu_1)) - \varphi(\bar{u}(\lambda, \mu_1))}{\Phi(\bar{u}(\lambda, \mu_1)) - \Phi(\bar{l}(\lambda, \mu_1))} \sqrt{\lambda}\sigma_J - \mu_1 < 0.$$

Zu ii) Wir wählen  $\lambda > \hat{\lambda}_{01} := \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{4\sigma_J^2\kappa^2}$ , so dass

$$u(\lambda) := M_0 + \sqrt{\lambda}\sigma_J\kappa > \mu_1, \quad \forall \lambda \geq \hat{\lambda}_{01}$$

und berechnen

$$\begin{aligned}\bar{l}(\lambda, u(\lambda)) &= -\kappa + \frac{M_0 - u(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J} = -2\kappa \\ \bar{u}(\lambda, u(\lambda)) &= \kappa + \frac{M_0 - u(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J} = 0.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\bar{l}(\lambda, u(\lambda)) = -2\kappa < 0 = \bar{u}(\lambda, u(\lambda))$$

und folglich

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{u}(\lambda, u(\lambda))) - \Phi(\bar{l}(\lambda, u(\lambda))) &> 0, \\ \varphi(\bar{l}(\lambda, u(\lambda))) - \varphi(\bar{u}(\lambda, u(\lambda))) &< 0.\end{aligned}$$

Für die Funktion

$$Q(\kappa) := \frac{\varphi(\bar{l}(\lambda, u(\lambda))) - \varphi(\bar{u}(\lambda, u(\lambda)))}{\Phi(\bar{u}(\lambda, u(\lambda))) - \Phi(\bar{l}(\lambda, u(\lambda)))} = \frac{\varphi(-2\kappa) - \varphi(0)}{\Phi(0) - \Phi(-2\kappa)}$$

werden wir nachfolgend zeigen, dass gilt

$$Q(\kappa) + \kappa > 0 \text{ für alle } \kappa > 0. \tag{B.5}$$

Nun wählt man  $\lambda \geq \hat{\lambda}_{02} := \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{4(Q(\kappa) + \kappa)^2\sigma_J^2}$ , so dass

$$F_1(\lambda, u(\lambda)) = u(\lambda) + Q(\kappa)\sqrt{\lambda}\sigma_J - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) + (\kappa + Q(\kappa))\sqrt{\lambda}\sigma_J > 0.$$

Insgesamt findet man ein  $\widehat{\lambda}_1 = \max\{\widehat{\lambda}_{01}, \widehat{\lambda}_{02}\}$ , so dass  $F_1(\lambda, u(\lambda)) > 0$  für alle  $\lambda \geq \widehat{\lambda}_1$ .

Zuletzt reichen wir noch den Beweis von Aussage (B.5) nach: Hierzu definieren wir die Hilfsfunktion

$$H(x) := \varphi(x) - \varphi(0) + \frac{x}{2}(\Phi(x) - \Phi(0)), \quad x \geq 0.$$

Wegen  $H(0) = 0$  ist

$$\begin{aligned} H'(x) &= -x\varphi(x) + \frac{1}{2}(\Phi(x) - \Phi(0)) + \frac{x}{2}(\varphi(x)) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi(x) - \Phi(0) - x\varphi(x)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (\varphi(u) - \varphi(x)) du, \\ &> 0 \end{aligned}$$

da  $\varphi(u) > \varphi(x)$  für  $u \in [0, x)$ . Damit erhalten wir für alle  $x > 0$

$$H(x) = \int_0^x H'(s) ds > 0.$$

Aus  $\kappa > 0$ , der Substitution  $x := 2\kappa$  und  $H(2\kappa) > 0$  ergibt sich mit  $\Phi(0) = 1/2$  und  $\Phi(-2\kappa) = 1 - \Phi(2\kappa)$ :

$$0 < \frac{\varphi(2\kappa) - \varphi(0)}{\Phi(2\kappa) - \Phi(0)} + \kappa = \frac{\varphi(-2\kappa) - \varphi(0)}{\Phi(0) - \Phi(-2\kappa)} + \kappa = Q(\kappa) + \kappa.$$

q.e.d.

Zu iii) Die Quotientenregel und

$$\partial_m \bar{l}(\lambda, m) = \partial_m \bar{u}(\lambda, m) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}$$

mit  $\bar{l} = \bar{l}(\lambda, m)$  und  $\bar{u} = \bar{u}(\lambda, m)$  ergeben

$$\partial_m F_1(\lambda, m) = 1 - \frac{\varphi'(\bar{l}) - \varphi'(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} - \left( \frac{\varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} \right)^2.$$

Wegen (B.2) und (B.3) ist

$$\begin{aligned} \varphi'(\bar{l}(\lambda, m)) &= -\bar{l}(\lambda, m)\varphi(\bar{l}(\lambda, m)) \longrightarrow \kappa\varphi(\kappa) \\ \varphi'(\bar{u}(\lambda, m)) &= -\bar{u}(\lambda, m)\varphi(\bar{u}(\lambda, m)) \longrightarrow -\kappa\varphi(\kappa). \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \Phi(\bar{u}(\lambda, m)) - \Phi(\bar{l}(\lambda, m)) \right) = \Phi(\kappa) - \Phi(-\kappa) = 2\Phi(\kappa) - 1$$



ergibt sich

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \partial_m F_1(\lambda, m) = 1 - \frac{2\kappa\varphi(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1}. \quad (\text{B.6})$$

Weil die Funktion  $\varphi$  am Rand des Intervalls  $[-\kappa, \kappa]$  minimal wird, ergibt sich aus

$$2\Phi(\kappa) - 1 = \int_{-\kappa}^{\kappa} \varphi(s) ds > \int_{-\kappa}^{\kappa} \varphi(\kappa) ds = 2\kappa\varphi(\kappa)$$

die Aussage

$$\frac{2\kappa\varphi(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1} \in (0, 1) \quad \text{für alle } \kappa > 0. \quad (\text{B.7})$$

Damit ist der Grenzwert (B.6) positiv und man findet ein  $\hat{\lambda}_2$ , so dass

$$\partial_m F_1(\lambda, m) > 0 \quad \text{für alle } \lambda \geq \hat{\lambda}_2.$$

q.e.d.

b) Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

- 1) Gemäß Satz 6.1 existiert  $\hat{\lambda} > 0$ , so dass für alle  $\lambda > \hat{\lambda}$  ein  $\tilde{\mu}_1(\lambda) > \mu_1$  und ein  $\tilde{\mu}_2(\lambda) < \mu_2$  mit  $\Upsilon^E(l(\lambda), u(\lambda), \tilde{\mu}_i(\lambda), \tilde{\varrho}_D(\lambda)) = \mu_i$  für  $i = 1, 2$  existieren.
- 2) Zeigt man nun noch dass die Funktionen  $\tilde{\mu}_1(\lambda)$  und  $\tilde{\mu}_2(\lambda)$  monoton fallend bzw. monoton wachsend sind, dann handelt es sich bei den Funktionen  $\{\tilde{\mu}_i(\lambda)\}_{\lambda > 0}$  um nach unten (bzw. im Fall  $i = 2$  oben) beschränkte, monoton fallende (bzw. im Fall  $i = 2$  wachsende) Funktionen, woraus man unmittelbar die Existenz der Grenzwerte  $g_i$ ,  $i = 1, 2$  folgert.

Zu 2) Für den Beweis der Monotonieeigenschaft betrachten wir die Ableitungen  $\mu'_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ . Wir beschränken uns dabei auf den Fall  $i = 1$ . Der Fall  $i = 2$  beweist sich analog. Aus dem Satz über die implizit gegebene Funktion gewinnt man zunächst die Differenzierbarkeit von  $\mu_1(\lambda)$ . Differentiation von (B.1) nach  $\lambda$  ergibt

$$\tilde{\mu}'_1(\lambda) = -\frac{\partial_\lambda F_1(\lambda, m)}{\partial_m F_1(\lambda, m)}.$$

Wegen iii) aus obigem Punkt a) ist  $\tilde{\mu}'_1(\lambda) < 0$  richtig, sofern  $\partial_\lambda F(\lambda, m) > 0$ . Somit bedarf es lediglich des Nachweises der Positivität von  $\partial_\lambda F_1$ . Unter Verwendung  $\bar{u}$  und  $\bar{l}$  aus (B.2) bzw. (B.3) gemäß

$$\bar{l} = \bar{l}(\lambda, m) = -\kappa + \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{und} \quad \bar{u} = \bar{u}(\lambda, m) = \kappa + \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

mit  $C = \frac{M_0 - m}{\sigma_J}$  und der Beobachtung

$$-\frac{C}{2} > 0 \quad \text{für } m > \mu_1, \quad (\text{B.8})$$

den Ableitungen  $\partial_\lambda \bar{l} = \partial_\lambda \bar{u} = -\frac{C}{2} \lambda^{-3/2}$  sowie

$$J_0(\lambda) = \Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l}), \quad J_1(\lambda) = \varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u}), \quad \text{und} \quad J_2(\lambda) = \varphi'(\bar{l}) - \varphi'(\bar{u})$$

ergibt formales Differenzieren nach  $\lambda$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda F_1(\lambda, m) &= \sigma_J \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} \right) \sqrt{\lambda} + \frac{\varphi(\bar{l}) - \varphi(\bar{u})}{\Phi(\bar{u}) - \Phi(\bar{l})} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \right] \\ &= \sigma_J \left[ -\frac{C}{2\lambda J_0^2(\lambda)} \left\{ J_2(\lambda) J_0(\lambda) + J_1^2(\lambda) \right\} + \frac{J_1(\lambda)}{J_0(\lambda)} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \right] \\ &= \frac{\sigma_J}{\lambda J_0^2(\lambda)} \tilde{H}(\lambda). \end{aligned}$$

Dabei besitzt  $\tilde{H}$  die Gestalt

$$\tilde{H}(\lambda) := J_0(\lambda) \left( -\frac{C}{2} J_2(\lambda) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} J_1(\lambda) \right) - \frac{C}{2} J_1^2(\lambda). \quad (\text{B.9})$$

Zum Nachweis der Positivität von  $\partial_\lambda F$  genügt es die Positivität von  $\tilde{H}$  nachzuweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir Taylorentwicklungen der Funktionen  $J_i(\lambda)$ ,  $i = 0, 1, 2$ :

i) Für  $v = v(\lambda) = C/\sqrt{\lambda}$  und wegen

$$\Phi(\kappa \pm v) = \Phi(\kappa) \pm \Phi'(\kappa)v + \frac{1}{2}\Phi''(\kappa)v^2 + O(\lambda^{-3/2})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} J_0(\lambda) &= \Phi(\bar{u}(\lambda)) - \Phi(\bar{l}(\lambda)) \\ &= \Phi(\kappa + C/\sqrt{\lambda}) - \Phi(-\kappa + C/\sqrt{\lambda}) = \Phi(\kappa + C/\sqrt{\lambda}) + \Phi(\kappa - C/\sqrt{\lambda}) - 1 \\ &= a_0 + \frac{b_0}{\lambda} + O(\lambda^{-3/2}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

mit  $a_0 = 2\Phi(\kappa) - 1$  und  $b_0 = -\kappa\varphi(\kappa)C^2$ .

ii) Aus der Taylorentwicklung für  $\varphi$

$$\varphi(-\kappa \pm v) = \varphi(-\kappa) \pm \varphi'(-\kappa)v + \frac{1}{2}\varphi''(-\kappa)v^2 \pm \frac{1}{3!}\varphi'''(-\kappa)v^3 + O(\lambda^{-2})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} J_1(\lambda) &= \varphi(\bar{l}(\lambda)) - \varphi(\bar{u}(\lambda)) \\ &= \varphi(-\kappa + C/\sqrt{\lambda}) - \varphi(\kappa + C/\sqrt{\lambda}) = \varphi(-\kappa + C/\sqrt{\lambda}) - \varphi(-\kappa - C/\sqrt{\lambda}) \\ &= \frac{C}{\sqrt{\lambda}}(a_1 + \frac{b_1}{\lambda} + O(\lambda^{-3/2})) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

mit  $a_1 = 2\varphi'(-\kappa) = -2\kappa\varphi(\kappa)$  und  $b_1 = \varphi'''(-\kappa)\frac{C^2}{3}$ .

iii) Zur Entwicklung von  $J_2$  ergeben sich ausgehend von  $\bar{u}$  und  $\bar{l}$  die Identitäten

$$\begin{aligned}\varphi'(\bar{l}) &= -\bar{l}\varphi(\bar{l}) \\ \varphi'(\bar{u}) &= -\bar{u}\varphi(\bar{u}) \\ \varphi'(-\bar{u}) &= \bar{u}\varphi(-\bar{u}) = \bar{u}\varphi(\bar{u}) = -\varphi'(\bar{u}).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Taylorentwicklung von  $\varphi'$

$$\varphi'(-\kappa \pm v) = \varphi'(-\kappa) \pm \varphi''(-\kappa)v + \varphi'''(-\kappa)\frac{v^2}{2} + O(\lambda^{-3/2})$$

erhalten wir analog

$$\begin{aligned}J_2(\lambda) &= \varphi'(\bar{l}(\lambda, m)) - \varphi'(\bar{u}(\lambda, m)) = \varphi'(\bar{l}(\lambda, m)) + \varphi'(-\bar{u}(\lambda, m)) \\ &= \varphi'(-\kappa + C/\sqrt{\lambda}) + \varphi'(-\kappa - C/\sqrt{\lambda}) \\ &= a_2 + \frac{b_2}{\lambda} + O(\lambda^{-3/2})\end{aligned}\tag{B.12}$$

mit  $a_2 = 2\varphi'(-\kappa)$  und  $b_2 = \varphi'''(-\kappa)C^2$ .

Unter Berücksichtigung von (B.11) und (B.12) ergibt sich

$$-\frac{C}{2}J_2(\lambda) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}J_1(\lambda) = -\frac{Cb_1}{\lambda} \quad \text{und} \quad J_1^2(\lambda) = \frac{C^2a_1^2}{\lambda} + O(\lambda^{-5/2}).\tag{B.13}$$

Für die Funktion (B.9) gilt wegen (B.10) und (B.13) damit

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= J_0(\lambda) \left( -\frac{C}{2}J_2(\lambda) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}J_1(\lambda) \right) - \frac{C}{2}J_1^2(\lambda) \\ &= (a_0 + \frac{b_0}{\lambda} + O(\lambda^{-3/2})) \left( -\frac{Cb_1}{\lambda} \right) - \frac{C^3a_1^2}{2\lambda} + O(\lambda^{-5/2}).\end{aligned}\tag{B.14}$$

Insgesamt finden wir unter Verwendung von

$$\varphi'''(-\kappa) = 4\kappa\varphi(\kappa)(\kappa^2 - 3)$$

und (B.11)-(B.12) sowie (B.14)

$$\lambda\tilde{H}(\lambda) = -Ca_0b_1 - \frac{C^3}{2}a_1^2 + O(\lambda^{-1}) \rightarrow -\kappa\varphi(\kappa)\frac{C^3}{2}Q_1(\kappa) \quad (\lambda \rightarrow \infty)\tag{B.15}$$

mit

$$Q_1(\kappa) := \frac{2}{3}(\kappa^2 - 3)(2\Phi(\kappa) - 1) + 4\kappa\varphi(\kappa).$$

Die Positivität der Funktion  $\tilde{H}$  für hinreichend große  $\lambda$  ergibt sich nun unmittelbar aus (B.8) und der Positivität der Hilfsfunktion  $Q_1$ . Letzteres folgt wegen der

Beobachtung  $Q_1(0) = 0$  und  $Q'_1(\kappa) > 0$  für alle  $\kappa > 0$  aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die Positivität von  $Q'_1$  ergibt sich unmittelbar aus (B.7) und

$$\frac{Q'(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1} = \frac{4}{3}\kappa \left(1 - \frac{2\kappa\varphi(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1}\right).$$

q.e.d.

c) Aus a) folgt für  $i = 1, 2$

$$F_i(\lambda, \tilde{\mu}_i(\lambda)) = \tilde{\mu}_i(\lambda) + \frac{\varphi(\widehat{l}_i(\lambda)) - \varphi(\widehat{u}_i(\lambda))}{\Phi(\widehat{u}_i(\lambda)) - \Phi(\widehat{l}_i(\lambda))} \sqrt{\lambda} \sigma_J - \mu_i = 0 \quad (\text{B.16})$$

mit  $\widehat{u}_i(\lambda) = \bar{u}(\lambda, \tilde{\mu}_i(\lambda))$  bzw.  $\widehat{l}_i(\lambda) = \bar{l}_i(\lambda, \tilde{\mu}_i(\lambda))$  aus (B.2) und (B.3). Darüberhinaus liefert a) die Existenz der endlichen Grenzwerte  $g_i = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_i(\lambda)$ , welche durch die Lösung der Gleichung

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_i(\lambda, \tilde{\mu}_i(\lambda)) = 0$$

bestimmt werden können. Somit bedarf es wegen

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \Phi(\widehat{u}_i(\lambda)) - \Phi(\widehat{l}_i(\lambda)) \right) = \Phi(\kappa) - \Phi(-\kappa) = 2\Phi(\kappa) - 1 \quad (\text{B.17})$$

lediglich der Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \varphi(\widehat{l}_i(\lambda)) - \varphi(\widehat{u}_i(\lambda)) \right) \sqrt{\lambda} \sigma_J.$$

Mit  $d_i(\lambda) := M_0 - \tilde{\mu}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$  schreiben sich die Normalverteilungsdichten an den Stellen  $\widehat{u}_i$  und  $\widehat{l}_i$  gemäß

$$\begin{aligned} \varphi(\widehat{u}_i(\lambda)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\kappa^2/2} \exp \left\{ -\frac{\kappa d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} - \frac{1}{2} \frac{d_i^2(\lambda)}{\lambda \sigma_J^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \varphi(\widehat{l}_i(\lambda)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( -\kappa + \frac{d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\kappa^2/2} \exp \left\{ \frac{\kappa d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} - \frac{1}{2} \frac{d_i^2(\lambda)}{\lambda \sigma_J^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Eine Taylorentwicklung liefert

$$\exp \left\{ \frac{\pm \kappa d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} - \frac{1}{2} \frac{d_i^2(\lambda)}{\lambda \sigma_J^2} \right\} = 1 \pm \frac{\kappa d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda} \sigma_J} - \frac{1}{2} \frac{d_i^2(\lambda)}{\lambda \sigma_J^2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Unter Verwendung der Konvergenz  $\tilde{\mu}_i \rightarrow g_i$ , und damit der Konvergenz  $d_i(\lambda) \rightarrow g_i - M_0$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  berechnen wir

$$\begin{aligned} (\varphi(\widehat{l}_i(\lambda)) - \varphi(\widehat{u}_i(\lambda)))\sqrt{\lambda}\sigma_J &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\kappa^2\right\} (2\kappa d_i(\lambda) + O(\lambda^{-1})) \\ &= -2\varphi'(\kappa)d_i(\lambda) + O(\lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Vollziehen wir in Gleichung (B.16) den Grenzübergang ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), so finden wir mit (B.17) und (B.20)

$$\mu_i = g_i - \frac{2\varphi'(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1}(M_0 - g_i).$$

Umstellen nach  $g_i$  ergibt schließlich die Behauptung. q.e.d.

## B.2 Beweis von Satz 6.3

*Beweis:* Mit  $\tilde{\varrho}_D^2(\lambda) = \sigma_J^2 \lambda$  und den Funktionen  $J_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  gemäß (B.10)-(B.12) erhalten wir aus Hilfssatz 4.1 sowie  $\widehat{u}_i(\lambda)$  und  $\widehat{l}_i(\lambda)$  aus (B.16)

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_D^2(\lambda)}{\lambda} &= \frac{\tilde{\varrho}_D^2(\lambda)}{\lambda} \left[ 1 + \frac{\varphi'(\widehat{l}_i(\lambda)) - \varphi'(\widehat{u}_i(\lambda))}{\Phi(\widehat{u}_i(\lambda)) - \Phi(\widehat{l}_i(\lambda))} - \left( \frac{\varphi(\widehat{l}_i(\lambda)) - \varphi(\widehat{u}_i(\lambda))}{\Phi(\widehat{u}_i(\lambda)) - \Phi(\widehat{l}_i(\lambda))} \right)^2 \right] \\ &= \sigma_J^2 \left[ 1 + \frac{J_2(\lambda)}{J_0(\lambda)} - \left( \frac{J_1(\lambda)}{J_2(\lambda)} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_0(\lambda) = 2\Phi(\kappa) - 1$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_1(\lambda) = \varphi(-\kappa) - \varphi(\kappa) = 0$$

bedarf lediglich der Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_2(\lambda).$$

Es bezeichne

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \frac{d_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}.$$

mit  $d_i(\lambda) = M_0 - \tilde{\mu}_i(\lambda)$ . Wegen Satz 6.1 ist zunächst

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_i(\lambda) = M_0 - g_i$$

und damit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varepsilon(\lambda) = 0.$$

Mit (B.12), (B.3) bzw. (B.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} J_2(\lambda) &= (-\kappa + \varepsilon)\varphi(-\kappa + \varepsilon) - (\kappa + \varepsilon)\varphi(\kappa + \varepsilon) \\ &= -\kappa(\varphi(-\kappa + \varepsilon) + \varphi(\kappa + \varepsilon)) + \varepsilon(\varphi(-\kappa + \varepsilon) - \varphi(\kappa + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Grenzübergang für  $\lambda \rightarrow \infty$  ergibt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_2(\lambda, \kappa) = -\kappa(\varphi(-\kappa) + \varphi(\kappa)) = -2\kappa\varphi(\kappa).$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\varrho_D^2(\lambda)}{\lambda} &= \sigma_J^2 \left[ 1 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{J_2(\lambda)}{J_0(\lambda)} - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{J_1(\lambda)}{J_2(\lambda)} \right)^2 \right] \\ &= \sigma_J^2 \left( 1 - \frac{2\kappa\varphi(\kappa)}{2\Phi(\kappa) - 1} \right) \\ &= \sigma_J^2(1 + w(\kappa)) \end{aligned}$$

mit  $w$  aus (6.10).

### B.3 Beweis von Hilfssatz 6.4

*Beweis:* Zunächst beweisen wir die Aussage (6.13), d.h. die Symmetrie der  $c_i(\lambda)$  bezüglich  $M_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ :

Eine kleinere Rechnung und  $\tilde{\mu}_1(\lambda) = 2M_0 - \tilde{\mu}_2(\lambda)$  gemäß (6.9) ergibt:

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= \Phi\left(\kappa + \frac{M_0 - \tilde{\mu}_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}\right) - \Phi\left(-\kappa + \frac{M_0 - \tilde{\mu}_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}\right) \\ &= \Phi\left(\kappa + \frac{M_0 - 2M_0 + \tilde{\mu}_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}\right) - \Phi\left(-\kappa + \frac{M_0 - 2M_0 + \tilde{\mu}_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}\right) \\ &= \Phi\left(\kappa + \frac{M_0 - \tilde{\mu}_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}\right) - \Phi\left(-\kappa + \frac{M_0 - \tilde{\mu}_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}\right) \\ &= c_2(\lambda). \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum Beweis der Aussage (6.14): Mit (B.17) genügt es wegen

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_2(\lambda) = 2\Phi(\kappa) - 1 \tag{B.21}$$

und

$$\lambda \left( \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} - 1 \right) = \frac{1}{c_2(\lambda)} \lambda (c_3(\lambda) - c_2(\lambda))$$

den Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda (c_3(\lambda) - c_2(\lambda))$$

auszuwerten. Sei zunächst

$$v_i(\lambda) := \frac{M_0 - \tilde{\mu}_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sigma_J} \quad \text{für } i = 1, 2 \quad \text{sowie} \quad v_3(\lambda) := \frac{M_0 - (2\tilde{\mu}_2(\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda))}{\sqrt{\lambda}\sigma_J}. \quad (\text{B.22})$$

Unter Verwendung von (B.22) erhalten wir die  $c_i$  gemäß

$$\begin{aligned} c_i(\lambda) &= \Phi(\kappa + v_i(\lambda)) - \Phi(-\kappa + v_i(\lambda)) \\ &= \Phi(\kappa + v_i(\lambda)) - (1 - \Phi(\kappa - v_i(\lambda))) \\ &= \Phi(\kappa + v_i(\lambda)) + \Phi(\kappa - v_i(\lambda)) - 1 \end{aligned}$$

für  $i = 1, 2, 3$ . Diese Darstellungen legen wegen  $v_i(\lambda) = O(\lambda^{-1/2})$ ,  $i = 1, 2, 3$  eine Verwendung der Taylor'schen Reihe nahe:

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa + v_i(\lambda)) &= \Phi(\kappa) + \Phi'(\kappa)v_i(\lambda) + \frac{1}{2}\Phi''(\kappa)v_i^2(\lambda) + O(\lambda^{-3/2}) \\ \Phi(\kappa - v_i(\lambda)) &= \Phi(\kappa) - \Phi'(\kappa)v_i(\lambda) + \frac{1}{2}\Phi''(\kappa)v_i^2(\lambda) + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned}$$

Summation ergibt für  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} D_i(\lambda) &:= \Phi(\kappa + v_i(\lambda)) + \Phi(\kappa - v_i(\lambda)) \\ &= 2\Phi(\kappa) + \Phi''(\kappa)v_i^2(\lambda) + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} c_3(\lambda) - c_2(\lambda) &= (D_3(\lambda) - 1) - (D_2(\lambda) - 1) \\ &= (2\Phi(\kappa) + \Phi''(\kappa)v_3^2(\lambda) + O(\lambda^{-3/2})) - (2\Phi(\kappa) + \Phi''(\kappa)v_2^2(\lambda) + O(\lambda^{-3/2})) \\ &= \Phi''(\kappa)(v_3^2(\lambda) - v_2^2(\lambda)) + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Wegen (B.22) und (6.9) ist

$$v_3^2(\lambda) - v_2^2(\lambda) = \frac{2(\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda))^2}{\lambda\sigma_J^2}$$

und zusammen mit (B.24) finden wir

$$\lambda(c_3(\lambda) - c_2(\lambda)) = \Phi''(\kappa)2\left(\frac{\tilde{\mu}_1(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda)}{\sigma_J}\right)^2 + O(\lambda^{-1/2}).$$

Der Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  und Bemerkung 6.2 sowie  $\Phi''(\kappa) = \varphi'(\kappa)$  liefern

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(c_3(\lambda) - c_2(\lambda)) = \frac{2\varphi'(\kappa)}{(1 + w(\kappa))^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_J^2} \quad (\text{B.25})$$

mit  $w$  aus (6.10). Insgesamt erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left( \frac{c_3(\lambda)}{c_2(\lambda)} - 1 \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{c_2(\lambda)} \lambda (c_3(\lambda) - c_2(\lambda)) \right) \\
 &= \frac{2\varphi'(\kappa)}{(2\Phi(\kappa) - 1)(1 + w(\kappa))^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_J^2} \\
 &= \frac{w(\kappa)}{(1 + w(\kappa))^2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_J^2}.
 \end{aligned}$$

q.e.d.



## Literatur

- [1] Ames W.F., *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Third Edition, Academic Press, (1977).
- [2] Bachelier. L., *Theorie de la speculation*. Annales de l' Ecole Normale Superieure, 17, 21-86, (1900).
- [3] Bäuerle N., Rieder U., *Portfolio Optimization with Markov-Modulated Stock Prices and Interest Rates*. Automatic Control, IEEE Transactions on 49 (3), 442-447, (2004).
- [4] Bäuerle N., Rieder U., *Portfolio Optimization with Unobservable Markov-Modulated Drift Process*. Journal of Applied Probability 42, 362-378, (2005).
- [5] Bäuerle N., Rieder U., *Control Improvement For Jump-Diffusion Processes with Applications to Finance*. Applied Mathematics & Optimization Volume 65, Issue 1 , 1-14 (2012).
- [6] Barski M., *Unvollständige Modelle der Finanzmärkte*. Vorlesungssriptum, WS 2012/13 Universität Leipzig, (2013).
- [7] Bismut J.M., *Conjugate convex functions on optimal stochastic control*. J.Math. Anal. Appl.,44, 384-404, (1973).
- [8] Björk T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, (2009).
- [9] Black, F. and Litterman, R., *Global portfolio optimization*. Financial Analysts Journal 48(5),28-43, (1992).
- [10] Brendle S., *Portfolio selection under incomplete information*. Stochastic Processes and Their Applications 116, 701-723. (2006).
- [11] Cont R., Tankov P., *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman & Hall, (2004).
- [12] Cox J., Huang C.F, *Optimal consumption and portfolio choices when asset prices follow a diffusion process*. Journal of Economic Theory, 49, 33-83, (1989).
- [13] Davis M., Lleo S., *Jump-Diffusion Risk-Sensitive Asset Management II: Jump-Diffusion Factor Model*. SIAM Journal on Control and Optimization, 51(2),1441-1480. (2007).
- [14] Davis M., Lleo S., *Black-Litterman in continuous time: the case for filtering*. Quantitative Finance Letters Vol.1,30-35, (2013).
- [15] Davis M., Lleo S., *Risk-Sensitive Investment Management*. Word Scientific: Advanced Series on Statistical Sciences & Applied Probability Vol.19, (2015).

- [16] Fleming W.H., Soner H.M., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. 2nd ed., Springer, New York, (2006).
- [17] Frey R., Gabih A., Wunderlich R., *Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions*. International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol. 15, No. 1, (2012).
- [18] Frey R., Gabih A., Wunderlich R. *Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions: A Dynamic Programming Approach*. Communications on Stochastic Analysis , Vol. 8, No. 1, 49-79, (2014).
- [19] Gabih A, Kondakji H., Sass J., Wunderlich R. *Expert Opinions and Logarithmic Utility Maximization In A Market With Gaussian Drift*. Communications on Stochastic Analysis , Vol. 8, No. 1, 27-47, (2014).
- [20] Gabih A., Grecksch W., Wunderlich R., *Dynamic portfolio optimization with bounded shortfall risks*. Stochastic Analysis and Applications, 23(3): 579-594, (2005).
- [21] Gabih A., Sass J., Wunderlich R., *Utility Maximization Under Bounded Expected Loss*. Stochastic Models, 3(25): 375-407, (2009).
- [22] Groß, J. *A normal distribution course*. 1. Auflage, Frankfurt am Main: Peter Lang Publishing, (2004).
- [23] Hanson F.B., *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, (2007).
- [24] Jonek C., *Stochastische Steuerung von Sprung-Diffusionen mit Anwendung in der Portfoliooptimierung*. Dissertation Heinrich Heine Universität Düsseldorf, (2008).
- [25] Karatzas I., *Adptive control of a diffusion to a goal, and a parabolic Monge-Ampere equation*. Asian J. Math., 1: 324-341, (1997).
- [26] Karatzas I., Lehoczky J.P, Shreve S.E., *Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a small investor on a finite horizon*. SIAM J. Control and Optimization, 25: 1557-1586, (1987).
- [27] Karatzas I., Xu, G.L., *A Note On Utility Maximization Under Partial Observations*. Mathematical Finance, 1(2), 57-70, (1991).
- [28] Kim T.S., Omberg E. *Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior* The Review of Financial Studies Vol. 9, No. 1, 141-161, (1996)
- [29] Korn R., *Portfolio optimization with strictly positive transaction costs and impulse control*. Finance and Stochastics 2, 85-114, (1998).

- 
- [30] Korn R., *Realism and practicality of transaction cost approaches in continuous-time portfolio optimization: the scope of the Morton-Pliska approach*. Mathematical Methods of Operations Research (ZOR) 60, Nr. 2, 165-174, (2004).
- [31] Korn, R., Seifried, F.T., *A worst-case approach to continuous-time portfolio optimization*. In: Radon Series for Computational and Applied Mathematics, (2010).
- [32] Korn R., Steffensen M., *Worst-case portfolio optimization*. SIAM Journal on Control and Optimization 46, 2013-2030, (2007).
- [33] Kuwana Y., *Optimal Consumption/Investment Decisions with Partial Observations*. Doctoral dissertation, Department of Statistics, Stanford University, (1993).
- [34] Kuwana Y., *Certainty-equivalence and logarithmic utilities in consumption/investment problems*. Mathematical Finance 5, 297-310, (1995).
- [35] Lakner, P., *Utility maximization with partial information*., Stochastic Processes and their Applications 56, 247-273, (1995).
- [36] Lakner, P., *Optimal trading strategy for an investor: the case of partial information*., Stochastic Processes and their Applications 76, 77-97, (1998).
- [37] Liptser R.S., Shiryaev A.N., *Statistics of Random Processes I - General Theory*. Applications of Mathematics. Springer, (1977).
- [38] Markowitz H.M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance. 7, (1952).
- [39] Merton R.C., *Life time portfolio selection under uncertainty: The continuous case*. Rev. Econom.Statistics, 51, 247-257, (1969).
- [40] Merton R.C., *Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*. Journal of Economic Theory 3, 373-413, (1971).
- [41] Nagai H, Runggaldier W., *PDE approach to utility maximization for market models with hidden Markov factors*. 5th Seminar on stochastic analysis, random fields and applications, Birkhauser Verlag, (2006).
- [42] Ocone D.L., Karatzas I., *A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios*. Stochastics and Stochastics Reports, 34: 187-220, (1991).
- [43] Øksendal B., *Stochastic Differential Equations*. Springer, (2007).
- [44] Øksendal B., Sulem A., *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer, (2004).
- [45] Pham H., *Optimal Stopping of Controlled Jump Diffusion Processes A viscosity Solution Approach*., Journal of Mathematical Systems, Estimations, and Control Vol.8,No.1,1-27, (1998).

- [46] Pham H., *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer, (2009).
- [47] Pliska S. R., *A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios*. Mathematics of Operations Research 11, 371-382, (1986).
- [48] Protter P.E., *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2.nd Edition, Springer, (2005).
- [49] Rogers L.C.G., *Optimal Investment*. Springer Briefs in Quantitative Finance, (2012).
- [50] Sass, J., Haussmann, U.G *Optimizing the terminal wealth under partial information: The drift process as a continuous time Markov chain*. Finance and Stochastics 8, 553-577, (2004).
- [51] Sass J., Wunderlich R. *Optimal portfolio policies under bounded expected loss and partial information*. Mathematical Methods of Operations Research, 72, 25-61, (2010)
- [52] Sauvigny F. *Analysis*. Springer Spektrum, (2012).
- [53] Schachermeyer, W., *Portfolio optimization in incomplete financial markets*. Lecture Notes of Scuola Normale Superiore di Pisa, (2001).
- [54] Schwarz H.R., Köckler N., *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner Verlag, (2006).
- [55] Seifried F.T., *Optimal investment in the face of adversity: taxes, crashes, and illiquidity*. Technische Universität Kaiserslautern, Dissertation, (2009)
- [56] Shreve S.E., *Stochastic Calculus for Finance I/II*. Springer, (2003).
- [57] Shreve S.E., Soner H.M., *Optimal Investment and Consumption With Transaction Costs*. Ann. Applied Probability 4, 609-692, (1994).
- [58] Tin-Kwai M., *Neue Aspekte der Portfolio-Optimierung und der Modellierung von Bondindizes*. Technische Universität Kaiserslautern, Dissertation, 2007
- [59] Touzi N., *Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems and Backward SDE*. Fields Institute Monographs 29, (2013).
- [60] Xu G.L., *A duality method for optimal consumption and investment under short-selling prohibition*. Doctoral dissertation, Department of Mathematics, Carnegie-Mellon University, (1990).

# Symbolverzeichnis

$\mathcal{D}^\lambda$ .....	106	$\mathcal{L}^{(r)}$ .....	26, 39
$\ e^m\ $ .....	41, 50	$\mathcal{L}^{(r,\lambda)}$ .....	108
$\mathbb{F}$ .....	14	$\mathcal{L}_{\delta_\pi}^{m,j}$ .....	43
$\mathcal{H}$ .....	15	$\mathcal{L}_{\delta_\pi}^{Reg,m,j}$ .....	67
$\mathcal{K}$ .....	15	$Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}$ .....	41
$K[G] _{(\tau, \pi)}$ .....	41	$Q_{\delta_\tau, \delta_\pi}^{Reg}$ .....	66
$K^E[G] _{(\tau_m, \pi_j)}$ .....	45	$(RegP)$ .....	35, 64, 65
$K_{Exp}^{CR}$ .....	75	$\mathcal{S}$ .....	19
$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^m$ .....	44	$\mathcal{S}_\varepsilon$ .....	34
$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{m,j}$ .....	43	$(UnRegP)$ .....	35, 40
$K^N[G] _{(\tau_m, \pi_j)}$ .....	43, 48	$\mathcal{Z}$ .....	38, 66
$K_{\delta_\tau \delta_\pi \delta_z}^{Reg,m,j}$ .....	68	$\mathcal{Z}_\lambda$ .....	97